НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ

«ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА»

(уровень магистратуры)

ПРОГРАММА АТТЕСТАЦИОННЫХ ИСПЫТАНИЙ

ПО ПРЕДМЕТУ «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ»

При восстановлении на 2 год обучения в рамках магистерской программы «Математическое моделирование» аттестационные испытания проводятся по представленным ниже разделам.

Программы разделов

**Общая схема вычислительного эксперимента.**

Теоретические и экспериментальные способы научного познания. Понятие и общая схема вычислительного эксперимента. Требования к основным частям цикла математического моделирования.

**Способы построения математических моделей.**

Способы описания физических объектов – механические модели с конечным числом степеней свободы, понятие функции распределения и кинетические уравнения, модель сплошной среды, модели электродинамики. Способы описания физических полей. Тензорные величины на примере описания напряженного состояния среды. Тензорная алгебра и понятие ковариантного дифференцирования. Законы сохранения как основной принцип построения математических моделей. Вариационные принципы и их связь с законами сохранения. Принцип наименьшего действия и его применение для построения математических моделей. Теорема Нетер.

**Методы исследования математических моделей.**

Использование частных решений для качественного описания исследуемого объекта. Симметрии как способ понижения числа независимых переменных. Метод спуска. Автомодельные решения. Простейшие виды автомодельности. Решение задачи Римана для уравнений газовой динамики.

**Вычислительные алгоритмы и их свойства. Вычислительный алгоритм как дискретная модель.**

Методы дискретизации уравнений математической модели. Проекционные методы и методы в фактор-пространствах. Недостаточность классических требований аппроксимации и устойчивости для описания негладких решений. Пример Самарского. Консервативные и полностью консервативные вычислительные алгоритмы. Использование принципа наименьшего действия для построения полностью консервативных схем. Метод опорных операторов. Схема Годунова. Понятие монотонности и схемы TVD. Метод конечных элементов и разрывный метод Галеркина.

**Методы построения расчетных сеток. Структурированные и неструктурированные сетки.**

Понятие расчетной сетки, виды используемых при математическом моделировании сеток. Построение структурированных сеток. Метод отображений. Метод Винслоу. Вариационные формулировки, барьерные свойства функционала Винслоу. Адаптивные сетки. Использование метрики для адаптации сеток. Неструктурированные сетки. Структуры данных, используемые для описание неструктурированных сеток. Метод движущегося фронта. Триангуляции Делоне.

**Параллельные вычисления.**

Архитектура современных многопроцессорных вычислительных систем. Основные принципы параллельного программирования. Оценки эффективности параллельных программ. Масштабирование. Геометрическое распараллеливание алгоритмов для решения задач математической физики. Динамическое перераспределение нагрузки.

**Разностные схемы для краевых задач.**

Постановка разностной краевой задачи. Основные понятия теории разностных схем: сетки, сеточные функции; разносная схема; аппроксимация, устойчивость, сходимость; корректность; методика исследования устойчивости и сходимости (метод энергетических неравенств и принцип максимума). Разностные схемы как операторные уравнения. Самосопряженность и положительная определенность разностного оператора. Разностная задача на собственные значения. Однородность и консервативность разностных схем. Сходимость однородной консервативной разностной схемы (гладкие и разрывные коэффициенты). Однородные схемы на неравномерных сетках. Правило Рунге повышения точности. Методы построения разностных схем: интегро-интерполяционный, вариационно-разностные (Ритца, Бубнова-Галеркина, конечных элементов); понятие о методе частиц. Принцип максимума.

**Задачи Коши для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.**

Разностная схема Эйлера. Сходимость и устойчивость. Методы Рунге-Кутты. Метод Адамса. Класс многошаговых методов, условие корней, нуль-устойчивость. Жесткие задачи, А- и А()-устойчивость, методы Гира.

**Задачи Коши для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.**

Двуслойные разностные схемы. Устойчивость по начальным данным. Необходимое и достаточное условие. Примеры применения основной теоремы. Устойчивость по правой части. Метод энергетических неравенств. -устойчивость и асимптотическая устойчивость.

**Разностные методы для эллиптических уравнений.**

Разностная задача Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике. Свойства разностного оператора. Сходимость (принцип максимума и метод энергетических неравенств). Прямые методы реализации разностной схемы (метод разделения переменных).

**Разностные методы для эволюционных задач.**

Разностные схемы для одномерного уравнения теплопроводности: метод прямых, схема с весами. Операторная запись; аппроксимация; устойчивость по начальным данным, по правой части; асимптотическая устойчивость. Уравнение переноса: условие Куранта, пример абсолютной неустойчивой схемы, устойчивость, монотонность; метод частиц. Разностные схемы для двумерного уравнения теплопроводности: схема с весами, устойчивость и сходимость (применение общей теории двуслойных схем и принципа максимума). Экономичные методы: факторизованный оператор, метод переменных направлений, метод суммарной аппроксимации.

**Итерационные методы для задач линейной алгебры.**

Двуслойные итерационные методы, примеры, теорема сходимости. Скорость сходимости неявного стационарного метода. Стационарный метод с оптимальным параметром. Модельная задача. Явный метод с Чебышёвским набором параметров. Оценка числа итераций. Сравнение на модельной задаче с методом простой итерации. Неявные методы: попеременно-треугольный и переменных направления. Модельная задача. Вариационно-итерационные методы: минимальных невязок, скорейшего спуска. Понятие о методе сопряженных градиентов.

|  |
| --- |
| **1.Понятие вероятностной модели, стохастической ситуации.** Понятие вероятностной модели. Стохастические ситуации, основные признаки стохастических ситуаций. Математическое описание стохастической ситуации.  **2. Математические модели характеристик случайных величин.** Парадокс Бертрана. Аксиоматика Колмогорова. Условия практической применимости вероятностных моделей, основанных на аксиоматике Колмогорова. Случайная величина. Математические модели центрального значения случайной величины. Математические модели разброса значений случайной величины. Независимость и зависимость событий и случайных величин. Ковариация и коэффициент корреляции.  **3. Основные предельные теоремы теории вероятностей.** Асимптотические вероятностные модели. Виды сходимости последовательностей случайных величин. Закон больших чисел, усиленный закон больших чисел, теорема Пуассона, центральная предельная теорема. Оценки скорости сходимости в законе больших чисел и центральной предельной теореме. Теорема Линдеберга-Феллера. Безгранично делимые и устойчивые распределения вероятностей.  **4. Понятие статистической структуры, выборки, оптимальной оценки.** Смещение оценки. Теорема о единственности оптимальной оценки. Примеры существования оптимальных оценок. Достаточные статистики. Теорема Рао-Блекуэлла-Колмогорова.  **5. Математические модели информации и неопределенности.** Энтропия Шеннона как мера неопределённости. Свойства энтропии эксперимента. Дифференциальная энтропия. Экстремальные информационные свойства равномерного, показательного и нормального законов распределения. Информационный подход к построению вероятностных моделей в условиях неопределённости.  **6. Геометрические вероятностные модели на прямой и на плоскости.** Задача оптимального размещения станций обслуживания вызовов, возникающих на прямой и плоскости по критерию минимизации среднего расстояния от вызова до ближайшей станции обслуживания.  **7. Оптимальные расположения систем массового обслуживания в пространстве.** Теорема о существовании оптимального размещения в N-мерном пространстве с равномерной метрикой. Построение асимптотически оптимальных размещений.  **8. Пуассоновский процесс и его экстремальные свойства.** Пуассоновский процесс. Пуассоновский процесс как модель хаотических распределений во времени. Информационные свойства пуассоновского процесса.  **9. Случайные суммы. Предельные теоремы для случайных сумм**. Элементарные свойства случайных сумм. Пуассоновские и геометрические случайные суммы. Пуассоновские и геометрические случайные суммы. Теорема Реньи. Теорема переноса. Аналог теоремы Пуассона для случайных сумм. Предельные теоремы для случайных сумм как источник вероятностных моделей с тяжёлыми хвостами.  **10. Процессы Кокса. Предельные теоремы для процессов Кокса.** Дважды стохастические пуассоновские процессы (процессы Кокса) как модели неоднородных хаотических потоков событий. Обобщенный процесс Кокса. Центральная предельная теорема и закон больших чисел для обобщенных процессов Кокса. Обобщенные процессы Кокса с дискретным временем.  **11. Смешанные гауссовские вероятностные модели.** Принципы анализа рисковых ситуаций с помощью смешанных гауссовских вероятностных моделей. Теоремы переноса.  **12. Смеси вероятностных распределений.** Смеси нормальных законов, как предельные распределения в теоремах для случайных сумм.  **13. Идентифицируемость смесей.**Островершинность масштабных смесей нормальных законов. Устойчивость прямой и обратной задач разделения смесей.  **14. Аппроксимация распределений смесями нормальных законов.** Распределение Стьюдента как масштабная смесь нормальных законов.  **15. Модели и задачи теории риска.** Основные задачи теории индивидуального и коллективного риска. Сравнение рисковых ситуаций.  **16. Математические модели эволюции финансовых индексов.** Построение математических моделей эволюции финансовых индексов с помощью обобщённых процессов Кокса. Предельные теоремы для моделей цен финансовых индексов. |

**Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

*Базовые учебники*

3. Самарский А.А., Гулин А.В.Численные методы математической физики.—М.: Научный мир, 2000.

*4.* Калиткин Н.Н.Численные методы*.—* СПб.: ПХВ - Петербург, 2011.

12*.* Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование*.—*М.: Наука, 2001.

3. Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики, М. Наука, 2004.

*Основная литература*

6. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. -М.: Наука. 1978.

7. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука. 1989.

8. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы.—М.—СПб.: Физматлит, 2001.

9. Андреев В.Б. Лекции по методу конечных элементов.—М.: изд. МАКС Пресс, 2010.

33. Абакумов М.В., Гулин А.В. Лекции по численным методам математической физики.—М.: Инфра - М, 2013

3. Тихонов А.Н. Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., Наука, 1977.

4. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения уравнений газовой динамики. М., Наука, 1992.

5. Четверушкин Б.Н. Кинетически согласованные схемы газовой динамики. М., МГУ, 1999.

6. Лисейкин В.Д. Разностные сетки. Теория и приложения. Новосибирск, изд. СО РАН, 2014.

1. Королев В.Ю., Бенинг В.Е., Шоргин С.Я. Математические основы теории риска. М.: Физматлит. 2007.

2. Королев В.Ю. Вероятностно-статистические методы декомпозиции волатильности хаотических процессов. М.: Издательство Московского университета. 2011.

*Дополнительная литература*

11. Иванов М.Ф., Гальбурт В.А. Численное моделирование динамики газов и плазмы методами частиц. - М.: МФТИ, 2000.

13. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. - СПб.: «Лань». 2002.

15. Е. Е. Тыртышников**.** Методы численного анализа. - М.: Издательский центр «Академия», 2007.

17. MIT OpenCourseWare. - <http://ocw.mit.edu/index.htm>.

18. Кирьянов Д.В., Кирьянова Е.Н. Вычислительная физика. – М.: Полибук Мультимедиа, 2006. - <http://keldysh.ru/pages/comma/>

19. GiD. – [www.gidhome.com](http://www.gidhome.com).

20. <https://www.eccomasproceedia.org/>

21. Е.Н. Аристова, Н.А. Завьялова, А.И. Лобанов. Практические занятия по вычислительной математике в МФТИ. Часть I. – М., МФТИ, 2014.

22. Е.Н. Аристова, А.И. Лобанов. Практические занятия по вычислительной математике в МФТИ. Часть II. – М., МФТИ, 2015.

23. <http://cfd.imamod.ru>

24. С. А. Волошин, Н. Б. Есикова. Задачи по численным методам (методическое пособие). - ВМК МГУ, 2011.

25. Бородачёв Л.В., Приклонский В.И. Численные методы в физике**.**–Физ. Фак. МГУ, 2014.

<http://math.phys.msu.ru/Numerical_methods_in_physics>

26. Боголюбов А.Н., Тихонов Н.А.,Токмачев М.Г. Основы математического моделирования.–Физ. Фак. МГУ, 2014.

<http://math.phys.msu.ru/Principles_of_Mathematical_Modeling>

30. Golub G.H.,VanLoan Ch.F.-MatrixComputations. – TheJohnHopkinsUniversityPress, 2013.

31. Quarteroni A. Sacco R. Saleri F. NumericalMathematics. - Springer-VerlagNewYork, 2000.

32. Briggs W.L. VanHenson E., McCormic S.F. A multigridtutorial. – SIAM, 2000.

1.Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, том 1. Механика. М., Физматлит, 2004.

2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, том 2. Теория поля. М., Физматлит, 2003.

3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, том 6. Гидродинамика. М., Физматлит, 2001.

4. Красносельский М.А, Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Отеценко В.Я. Приближенное решение операторных уравнений. М., Наука, 1969.

5. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко, Прокопов Г.В.,. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М., Наука, 1976.

6. Годунов С.К. Уравнения математической физики. М., Наука, 1979.

б) дополнительная литература:

1. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1990.

2. Захарова Т.В. Оптимальные размещения систем массового обслуживания с дисциплиной обслуживания FIFO. – Вест. Моск.ун-та, сер.15. Вычисл. матем. и киберн., 2007, № 4, с.32-37.

2. Золотарев В.М. Современная теория суммирования случайных величин. – М.: Наука, 1986.

3. Золотарев В.М. Одномерные устойчивые распределения. – М.: Наука, 1983.

4. Интернет-ресурс (Department of Operations Research and Financial EngineeringPrinceton University)

<http://www.princeton.edu/engineering>, <http://orfe.princeton.edu/~jqfan/fan/classes/524/notes1.pdf>.