Открытая олимпиада по математике

10 декабря 2011

Время работы: 180 минут
Каждая задача оценивается в 10 баллов.

1. Назовем конечное числовое множество своеобразным, если оно содержит число, равное количеству его элементов, но никакое его собственное подмножество этим свойством не обладает. Определите количество своеобразных подмножеств множества $\{1,\ 2,\ \ldots,\ 12\}$.

2. Определите множество значений функции, сопоставляющей каждому прямоугольному треугольнику отношение $\dfrac{h}{r}$, где h — высота, проведенная к гипотенузе, а r — радиус вписанной в треугольник окружности.

3. Две последовательности $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяют условиям:
$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - \alpha y_n, \\ y_{n+1} = 2y_n - \dfrac{1}{\alpha}x_n \end{cases}$$
при всех $n \geqslant 0$, где $\alpha \neq 0$ — постоянная величина, а $x_0 = 1$ и $y_0 = 0$. Найдите x_{2012} и y_{2012}.

4. Существует ли такая последовательность вещественных чисел $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, что для неё справедливы соотношения:
$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} x_{12k} = 20, \\ \lim\limits_{k\to\infty} x_{20k} = 12? \end{cases}$$

5. Найдите $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \left(\sin^2(\sin^2 x) + \cos^2(\cos^2 x)\right)\, dx$.

6. Найдите $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n! + (n+1)! + (n+2)!}$.

7. Найдите все функции $f\colon [0,\ 1] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие неравенству $(x-y)^2 \leqslant |f(x) - f(y)| \leqslant |x-y|$ для любых $x, y \in [0,\ 1]$.

8. Пусть $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$ — все положительные корни уравнения $\operatorname{tg} x = x$, выписанные в порядке возрастания, $n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k,\ \ldots$ — некоторая возрастающая последовательность натуральных чисел. Докажите, что ряды $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |\cos x_{n_k}|$ и $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}$ сходятся или расходятся одновременно.

9. Квадратная матрица A порядка n состоит из чисел $+1$ и -1. При этом, в каждой строке и в каждом столбце этой матрицы находится ровно одно число -1. Найдите $|\det A|$.

10. Пусть S — сумма всех обратимых элементов конечного ассоциативного кольца с единицей. Докажите, что $S^2 = 0$ или $S^2 = S$.