Открытая олимпиада по математике

20 декабря 2013

Время работы: 180 минут
Каждая задача оценивается в 10 баллов.

1. Можно ли разрезать квадрат 7×7 на 5 частей так, чтобы из них можно было сложить 3 квадрата попарно различных целых площадей?

2. Известно, что a, b и c — корни уравнения $x^3 + px + q = 0$. Вычислите определитель матрицы:
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

3. На плоскости дана парабола. Найдите множество точек плоскости, из которых парабола видна под прямым углом (т.е. касательные, проведённые из этой точки, перпендикулярны друг другу).

4. Бинарная операция $*$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет соотношению $(a * b) * c = a + b + c$ для любых вещественных чисел a, b и c. Докажите, что $a * b = a + b$ для любых вещественных a и b.

5. Назовем перестановку чисел от 1 до N «интересной», если никакое число не стоит на своем месте ($a_i \neq i$). Обозначим $S(N)$ количество «интересных» перестановок чисел от 1 до N. Вычислите:
а) $S(N)$;
б) $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{S(N)}{N!}$.

6. Определите все вещественные числа k, для которых справедливо соотношение:
$$\int_1^2 (1 + k\ln x)\, x^{x^k+k-1} dx = 15.$$

7. Докажите, что:
а) существует бесконечно много целых чисел, не представимых в виде суммы кубов трёх целых чисел (среди которых могут быть равные);
б) любое целое число представимо в виде суммы кубов пяти целых чисел (среди которых могут быть равные).

8. Пусть n — натуральное число, кратное 4. Посчитайте количество различных биекций $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ таких, что $f(j) + f^{-1}(j) = n + 1$ для всех $j = 1, \ldots, n$.

   Пример: для биекции $f : (1, 2, 3, 4) \to (2, 4, 1, 3)$ обратной будет $f^{-1} : (1, 2, 3, 4) \to (3, 1, 4, 2)$.

9. Известно, что $P(x)$ — многочлен степени n такой, что для всех $t \in \{1, 2, 2^2, \ldots, 2^n\}$ верно $P(t) = \frac{1}{t}$. Найдите $P(0)$.

10. В графе G все вершины степени k. При этом в G нет треугольников и для любых двух вершин, у которых нет общего ребра, найдутся ровно две вершины, с которыми есть общие рёбра у каждой из этих двух вершин. Чему равно количество вершин G?