Отборочная олимпиада по математике

15 марта 2014

Время работы: 180 минут
Каждая задача оценивается в 10 баллов.

1. Вычислить произведение двух чисел с помощью операций сложения, вычитания, возведения в квадрат и взятия обратного числа. Возможностью обращения знаменателя в 0 пренебречь.

2. Пусть α, β, γ — три различных корня уравнения $x^3 - x - 1 = 0$. Вычислите:
$$\frac{1-\alpha}{1+\alpha} + \frac{1-\beta}{1+\beta} + \frac{1-\gamma}{1+\gamma}.$$

3. Найти максимальное значение определителя третьего порядка, у которого 2 элемента равны 4, а остальные 1 или -1.

4. Решите в комплексных числах систему:
$$\begin{cases} \sqrt{3}z^{11} - z^{10} - 1 = 0 \\ |z| = 1 \end{cases}$$

5. Вычислите интеграл
$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}.$$

6. Из точки P к параболе с фокусом F провели две касательные PX и PY. Докажите, что:
$$FP^2 = FX \cdot FY.$$

7. Обозначим $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$. Известно, что уравнение $f(x) = x$ не имеет решений. Докажите, что последовательность $a_n = \min \underbrace{f(f(\cdots f}_{n}(x)\cdots))$ — возрастающая.

8. Даны натуральные числа m, n такие, что $m^2 - 2n^2 = 1$, и даны функции:
$$\begin{aligned} f_1(x) &= \cos(x), \\ f_2(x) &= \mathrm{ctg}(x), \\ f_3(x) &= \mathrm{arctg}(x). \end{aligned}$$
Докажите, что существует композиция $H(x)$ из указанных функций (некоторые функции могут быть использованы несколько раз, а некоторые ни разу) такая, что $H(1) = \frac{m}{n}$.

9. Пусть $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, ..., p_n — возрастающая последовательность всех простых чисел, не превосходящих 2^{100}. Докажите, что:
$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_n} < 10.$$