Открытая олимпиада по математике

9 декабря 2017

Время работы: 180 минут
Каждая задача оценивается в 10 баллов.

1. Привести пример вещественной матрицы A такой, что $A^4 = I$, но при этом $A^2 \neq \pm I$, где I — единичная матрица.

2. Существует ли такая расходящаяся числовая последовательность $\{x_n\}$, что при любом натуральном $k > 1$ её подпоследовательность $\{x_{kn}\}$ сходится?

3. Вычислите
$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^{2k} + 2017}{2018^x + 1}\, dx,$$
где $k \in \mathbb{Z}$.

4. Найдите все непрерывные функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что
$$f(x) + f\left(3 - \frac{9}{x}\right) = x - \frac{9}{x}$$
для всех $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$.

5. К параболе проведены две касательные l_a и l_b в точках A и B. Точка C симметрична точке A относительно l_b, а точка D симметрична точке B относительно l_a. Докажите, что точки A, B, C и D образуют ромб тогда и только тогда, когда AB проходит через фокус параболы.
Можно использовать оптическое свойство параболы без доказательства.

6. Найдите все такие натуральные n, при которых $C_n^0 \cdot C_n^1 \cdot \ldots \cdot C_n^n$ является точным квадратом.
Здесь $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ *— биномиальный коэффициент.*

7. Докажите сходимость последовательности $\{a_n\}$, где $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \sin a_n$, и найдите её предел.

8. Функция $F(n, k)$, определённая для всех целых неотрицательных n и k, удовлетворяет условиям
$$\begin{cases} F(n,k) = F(n-1,k) + F(n,k-1), & n \geqslant 1, k \geqslant 1, \\ F(n,0) = 1, & n \geqslant 0, \\ F(0,k) = 2F(0,k-1) + 1, & k \geqslant 1. \end{cases}$$
Вычислите $F(n, n)$.