Республиканская студенческая предметная олимпиада по направлению «Математика»

13 апреля 2017

Указания

1. **Пусть $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, заданная рекуррентно:** $T_1 = T_2 = T_3 = 1$ **и** $T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n$ **при** $n \geqslant 1$. **Вычислите сумму ряда**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n}{2^n},$$

если известно, что данный ряд сходится. *(Абдикалыков А.)*

Решение:

Пусть $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{T_n}{2^n}$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_{n+1}}{2^n} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_{n+1}}{2^{n+1}} = 2 \cdot \left(S - \frac{T_1}{2^1} \right) = 2S - 1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_{n+2}}{2^n} = 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_{n+2}}{2^{n+2}} = 4 \cdot \left(S - \frac{T_1}{2^1} - \frac{T_2}{2^2} \right) = 4S - 3,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_{n+3}}{2^n} = 8 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_{n+3}}{2^{n+3}} = 8 \cdot \left(S - \frac{T_1}{2^1} - \frac{T_2}{2^2} - \frac{T_3}{2^3} \right) = 8S - 7.$$

Так как по условию $T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n$, то $8S - 7 = 4S - 3 + 2S - 1 + S$, откуда следует $S = 3$.

2. **Найдите все простые p, запись которых в k-ичной системе счисления при некотором натуральном $k > 1$ содержит ровно k различных цифр (старшая цифра не может быть нулём).** *(Абдикалыков А.)*

Решение:

Пусть k-ичная запись простого числа p для некоторого $k > 1$ выглядит как $\overline{a_0 a_1 \ldots a_{k-1}}$, где $(a_0, a_1, \ldots, a_{k-1})$ — некоторая перестановка цифр $(0, 1, \ldots, k-1)$. Тогда

$$p = a_0 \cdot k^{k-1} + a_1 \cdot k^{k-2} + \ldots + a_{k-1} \cdot k^0 \equiv a_0 + a_1 + \ldots + a_{k-1} \pmod{(k-1)}.$$

Поскольку сумма всех цифр равна $k(k-1)/2$, то можно сделать вывод, что число p делится на $(k-1)/2$, если k нечётно и на $k-1$, если k чётно. Учитывая, что $p \geqslant k^{k-1} > k-1$ — простое число, заключаем, что k должно удовлетворять совокупности соотношений

$$\left[\begin{array}{ll} \frac{k-1}{2} = 1, & k = 2l+1, \\ k-1 = 1, & k = 2l. \end{array} \right.$$

Таким образом, $k = 2$ или $k = 3$, а значит, достаточно перебрать числа 10_2, 102_3, 120_3, 201_3, 210_3. Простыми среди них являются только $2 = 10_2$, $11 = 102_3$ и $19 = 201_3$.

3. **Докажите, что в любой группе квадрат произведения двух элементов порядка два и куб произведения двух элементов порядка три всегда являются коммутаторами.** *(Клячко А.)*

Решение:

а) Для любого элемента x порядка 2 верно $x = x^{-1}$, поэтому

$$(ab)^2 = abab = aba^{-1}b^{-1},$$

если $a^2 = b^2 = e$.

б) Аналогично, для любого элемента x порядка 3 верно $x^2 = x^{-1}$, поэтому

$$(ab)^3 = ababab = ab^4aba^4b = (ab^2)(b^2a)(ba^2)(a^2b) = (ab^2)(b^2a)(ab^2)^{-1}(b^2a)^{-1},$$

если $a^3 = b^3 = e$.

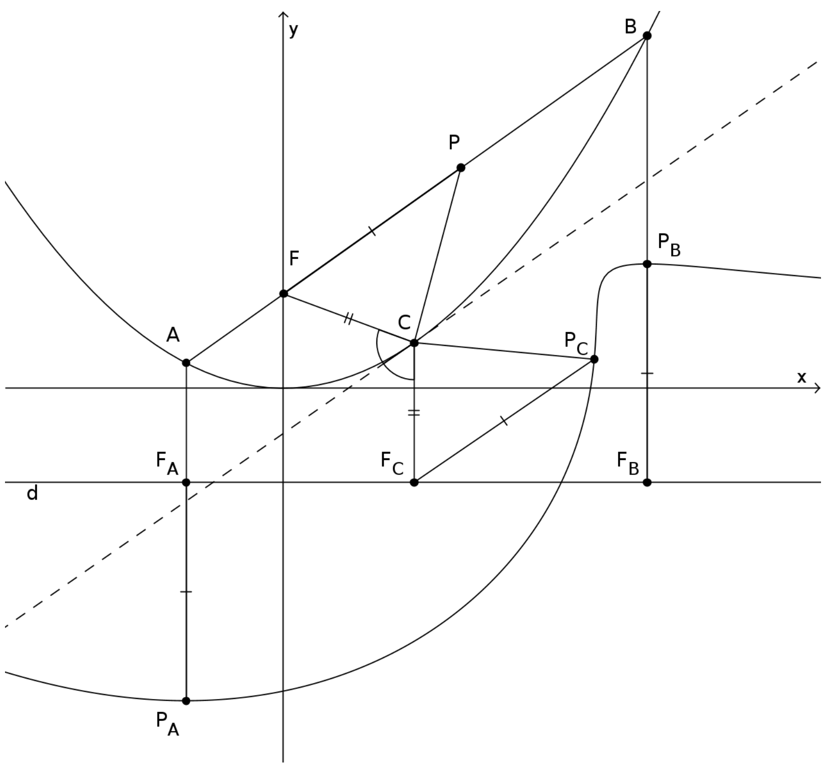
4. **Точка P лежит внутри выпуклой области, ограниченной параболой $y = x^2$, но не лежит на оси OY. Обозначим через $S(P)$ множество всех точек, полученных отражением P относительно всех касательных к параболе.**
а) Докажите, что значение суммы

$$\max_{(x,y)\in S(P)} y + \min_{(x,y)\in S(P)} y$$

не зависит от выбора точки P.
б) Найдите геометрическое место точек P таких, что $\max\limits_{(x,y)\in S(P)} y = 0$. *(Баев А.)*

Решение:

Обозначим через F фокус параболы, через d директрису параболы. Рассмотрим произвольную касательную к параболе l в произвольной точке C.



Свойство 1: точка F_C, симметричная F относительно l, лежит на директрисе d. Из определения параболы: $FC = F_CC$. Из оптического свойства параболы $\angle(FC;l) = \angle(l;F_CC)$. Отсюда следует, что l — ось симметрии для отрезков FC и F_CC.

Свойство 2:

$$-\frac{1}{4} - FP \leqslant y(P_C) \leqslant -\frac{1}{4} + FP,$$

где $y(P_C)$ — ордината точки P_C.

Известна директриса данной параболы $y = -\frac{1}{4}$. Ордината точки F_C равна $-\frac{1}{4}$. А точка P_C находится на расстояния не более, чем F_CP_C от директрисы. Осталось заметить, что с учетом свойства 1 треугольники FCP и F_CCP_C равны, то есть $F_CP_C = FP$.

Свойство 3: $\max\limits_{(x,y)\in S(P)} y = -\dfrac{1}{4}+FP$ и $\min\limits_{(x,y)\in S(P)} y = -\dfrac{1}{4}-FP$. Максимум или минимум $y(P_C)$ в свойстве 2 достигается в том случае, если P_CF_C перпендикулярно директрисе. Причем для максимума необходимо, чтобы P_C и C лежали по одну сторону от директрисы, а для минимума — по разные стороны. То есть угол CF_CP_C равен либо 0, либо π (соответственно, угол CFP равен либо 0, либо π). В качестве таких точек C достаточно выбрать точки пересечения FP с параболой A и B. Значит, оба равенства в свойстве 2 достигаются.

Свойство 4: геометрическим местом точек в пункте б) является окружность с центром в F и радиусом $\frac{1}{4}$. Из свойства 3 следует, что $FP = F_BP_B = \frac{1}{4}$.

5. **Для каждой функции $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ обозначим через $s_n(f)$ и $S_n(f)$ нижнюю и верхнюю суммы Дарбу для функции f, соответствующие равномерному разбиению $[0,1]$ на n частей. Существует ли такая интегрируемая функция f, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n(f)$ сходится, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n(f)$ расходится?**

(Васильев А.)

Ответ: да, существует.

Решение:

Можно привести множество примеров, но мы укажем самый простой:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \in [0,1) \\ 1, x = 1 \end{cases}$$

Обозначив $\frac{i}{n}$ через x_i, имеем: $m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = 0$ для всех $i = \overline{1,n}$ и

$$M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = \begin{cases} 0, i = \overline{1, n-1} \\ 1, i = n \end{cases}$$

Следовательно, $s_n(f) = 0$ и $S_n(f) = \frac{1}{n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. При этом f интегрируема на $[0,1]$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 0$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится.

6. **Некоторые участники математической олимпиады списали решения некоторых задач у своих товарищей. Докажите, что можно с позором выгнать часть участников так, чтобы получилось, что более четверти от общего числа списанных решений было списано выгнанными участниками у не выгнанных.** *(Высоканов Б., Клячко А.)*

Решение:

Обозначим через n количество участников олимпиады и присвоим им номера от 1 до n. Пусть a_{ij} — количество решений, списанных i-ым участником у j-го, при этом полагаем $a_{ii} = 0$. Рассмотрим два случая:

1) $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Если $k = 1$, то доказательство тривиально. Пусть $k \leqslant 2$. Доказательство проведем от противного. Допустим, что, выгоняя любые k человек из $2k$, мы никогда не достигнем требуемого. Тогда для любого $S' \subset S$, где $|S'| = k$ и $S = \{1, 2, ..., 2k\}$, имеем:

$$\sum_{\substack{i \in S' \\ j \in S \setminus S'}} \leqslant \frac{1}{4} \sum_{i,j \in S} a_{ij}.$$

Просуммируем эти неравенства по всем S':

$$\sum_{S'} \sum_{\substack{i \in S' \\ j \in S \setminus S'}} a_{ij} \leqslant \frac{1}{4} \sum_{S'} \sum_{i,j \in S} a_{ij}.$$

Заметим, что каждое a_{ij} при $i \neq j$ в сумме слева встретится ровно C_{2k-2}^{k-1} раз, а в сумме справа — ровно C_{2k}^{k} раз. Разделив обе части неравенства на $\sum_{i,j \in S} a_{ij} > 0$, находим:

$$C_{2k-2}^{k-1} \leqslant \frac{1}{4} C_{2k}^{k},$$

что неверно, так как

$$\frac{C_{2k}^{k}}{C_{2k-2}^{k-1}} = 2\left(2 - \frac{1}{k}\right) < 4.$$

2) $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. При $k = 1$ доказательство тривиально. При $k \geqslant 2$ рассуждаем аналогично 1), рассматривая все $S' \in S$ с условием $|S'| = k$ (при этом $S = \{1, 2, ..., 2k + 1\}$).