Республиканская студенческая предметная олимпиада
по специальности «Математика»
Нур–Султан, 19.04.19
Разбор решений

1. (Баев А.Ж.) Найдите сумму ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{n+1}{n(n-1)}.$$

Решение:

Умножим числитель и знаменатель отдельного элемента ряда на 2^{n-1}:

$$\frac{1}{2^n} \cdot \frac{n+1}{n(n-1)} = \frac{2^{n-1}(n+1)}{2^n n \cdot 2^{n-1}(n-1)} = \frac{2^n n - 2^{n-1}(n-1)}{2^n n \cdot 2^{n-1}(n-1)} = \frac{1}{2^{n-1}(n-1)} - \frac{1}{2^n n}.$$

Обозначив $b_n = \frac{1}{2^n n}$, перепишем наш ряд в виде

$$\sum_{n=2}^{\infty} (b_{n-1} - b_n) = b_1 = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

2. (Васильев А.Н.) Решите уравнение

$$x^y = x + y$$

в положительных рациональных числах.

Решение:

Допустим, $x = \frac{p}{q}$ и $y = \frac{m}{n}$ — несократимые дроби. Тогда

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{p}{q} + \frac{m}{n}$$

Чтобы значение левой части равенства было рациональным, необходимо $p = a^n$, $q = b^n$ для некоторых натуральных a и b.

$$\frac{a^m}{b^m} = \frac{a^n}{b^n} + \frac{m}{n} \iff \frac{a^m b^n - a^n b^m}{b^{n+m}} = \frac{m}{n}$$

Приведём дробь в левой части к несократимому виду. При $n > m$

$$\frac{a^m(b^{n-m} - a^{n-m})}{b^n} = \frac{m}{n}$$

и при $n < m$

$$\frac{a^n(a^{m-n} - b^{m-n})}{b^m} = \frac{m}{n},$$

а случай $m = n$, очевидно, не возможен. Получаем, что $n = b^{\max(m,n)}$ и в любом случае $n \geqslant b^n$, или $b \leqslant n^{\frac{1}{n}}$. Но $n^{\frac{1}{n}} < 2$ при любом n, и поэтому решение возможно только при $b = 1$ и $n = 1$.

Так, задача свелась к решению в целых числах. Обязательно должно выполняться $x \geqslant 2$ и $y \geqslant 2$, поскольку варианты $x = 1$ и $y = 1$ не возможны. Пусть $y > 2$, тогда

$$x(x^{y-1} - 1) \geqslant 2(2^{y-1} - 1) > y.$$

Следовательно, $y = 2$, а x можно найти, решив уравнение $x^2 = x + 2$.

Ответ: $(2, 2)$.

3. (Васильев А.Н.) Пусть f — интегрируемая по Риману на отрезке $[0, 1]$ функция. Введём обозначение

$$\mathcal{M}(f) = \operatorname*{Arg\,min}_{\lambda \in \mathbb{R}} \int\limits_0^1 |f(x) - \lambda| \, dx.$$

а) Докажите, что множество $\mathcal{M}(f)$ не пустое.

б) Приведите пример такой функции f, что множество $\mathcal{M}(f)$ не одноэлементно.

в) Докажите, что если функция f монотонная, то $f\left(\frac{1}{2}\right) \in \mathcal{M}(f)$.

г) Приведите пример такой функции f, что $f\left(\frac{1}{2}\right) \notin \mathcal{M}(f)$.

Примечание: $\operatorname*{Arg\,min}_{\lambda \in S} g(\lambda) = \left\{ \mu \in S \colon g(\mu) = \inf\limits_{\lambda \in S} g(\lambda) \right\}$.

Решение:

Обозначим $g(\lambda) = \int\limits_0^1 |f(x) - \lambda| \, dx$. Функция $f(x)$ интегрируема на данном отрезке интегрирования, а значит, $g(\lambda)$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

а) Функция $f(x)$ интегрируема на $[0, 1]$, а значит, ограничена на нём. Пусть $m = \inf\limits_{x \in [0,1]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x \in [0,1]} f(x)$. Очевидно, что функция $g(\lambda)$ убывает на $(-\infty, m)$ и возрастает на $(M, +\infty)$. А так как $g(\lambda)$ непрерывна на сегменте $[m, M]$, то она достигает на нём своего минимума, который при этом является глобальным. Следовательно, множество $\mathcal{M}(f)$ не пустое.

б) Для $f(x) = \operatorname{sgn}\ (2x - 1)$ функция $g(\lambda)$ будет постоянной на отрезке $[-1, 1]$, что даёт $\mathcal{M}(f) = [-1, 1]$.

в) Без ограничения общности можно считать, что $f(x)$ нестрого возрастающая. Пусть $f(c - 0) \leqslant \lambda \leqslant f(c + 0)$ для некоторого $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ (случай $c \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ рассматривается аналогично). Тогда

$$g(\lambda) = \int\limits_0^c (\lambda - f(x)) \, dx + \int\limits_c^1 (f(x) - \lambda) \, dx = \lambda(2c - 1) + \int\limits_0^1 f(x) \, dx - 2 \int\limits_0^c f(x) \, dx,$$

$$g\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \int\limits_0^1 f(x) \, dx - 2 \int\limits_0^{\frac{1}{2}} f(x) \, dx,$$

$$g(\lambda) - g\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \lambda(2c-1) + 2\int\limits_c^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx \geqslant \lambda(2c-1) + 2\int\limits_c^{\frac{1}{2}} \lambda\,dx = 0.$$

Следовательно, $f\left(\frac{1}{2}\right) \in \mathcal{M}(f)$.

г) Примером такой функции может служить $f(x) = |2x-1|$. Здесь $g(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{2}$ на $[0,1]$, и $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \notin \mathcal{M}(f) = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

4. (Абдикалыков А.К.) Дана матрица $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ такая, что $|A^2 + A + 2019E| = 0$. Докажите, что $A^2 + A + 2019E = O$, где E — единичная матрица 2×2, а O — нулевая матрица 2×2.

Решение:

Пусть λ_1, λ_2 — собственные значения матрицы A, тогда $\mu_1 = \lambda_1^2 + \lambda_1 + 2019$ и $\mu_2 = \lambda_2^2 + \lambda_2 + 2019$ будут собственными значениями матрицы $A^2 + A + 2019E$. Но тогда по условию $(\lambda_1^2 + \lambda_1 + 2019)(\lambda_2^2 + \lambda_2 + 2019) = 0$, и один из множителей должен быть равным нулю. Без ограничения общности будем считать, что $\lambda_1^2 + \lambda_1 + 2019 = 0$. В таком случае $\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(-1 \pm i\sqrt{4075}\right)$ — комплексное число, а так как A — вещественная матрица, то $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} \neq \lambda_1$ и A имеет два линейно независимых собственных вектора x_1 и x_2. Те же векторы будут собственными и для $A^2 + A + 2019E$, но уже для собственных чисел $\mu_1 = \lambda_1^2 + \lambda_1 + 2019 = 0$ и $\mu_2 = \lambda_2^2 + \lambda_2 + 2019 = \overline{\lambda_1^2 + \lambda_1 + 2019} = 0$. Следовательно, $A^2 + A + 2019E = O$.

5. (Баев А.Ж.) Дан эллипс с фокусами A и B и точка C вне эллипса. Из точки C провели касательные к эллипсу l_1 и l_2, которые образуют угол α. Точки A_1 и A_2 — точки, симметричные A относительно касательных, B_1 и B_2 — точки, симметричные B относительно касательных. Вычислите

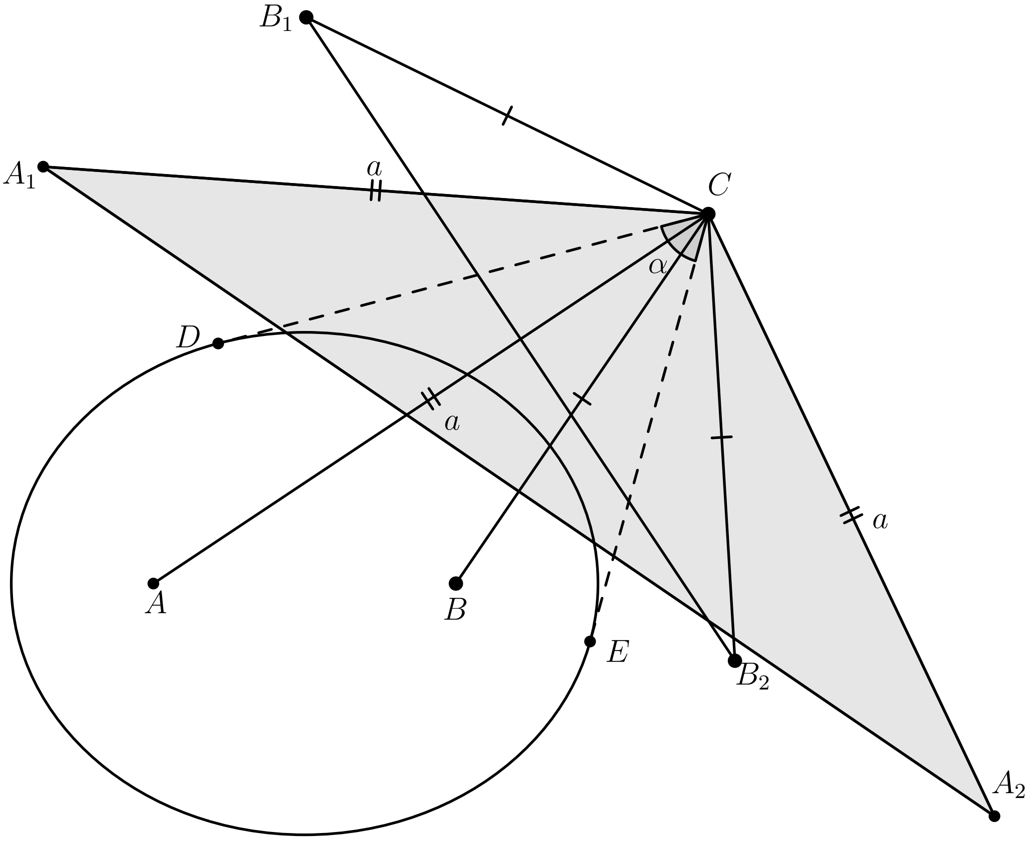
$$\frac{A_1A_2^2 + B_1B_2^2}{CA^2 + CB^2},$$

если

а) $\alpha = \frac{\pi}{2}$;

б) $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Решение:



В решении задачи никак не используется эллипс. Достаточно заметить, что $CA = CA_1 = CA_2 = a$, $CB = CB_1 = CB_2 = b$ в силу симметрии. Также верно, что $\angle ACD = \angle A_1CD$ и $\angle ACE = \angle A_2CE$. Значит,

$$\angle DCE = \angle ACD + \angle ACE = \frac{1}{2}\angle ACA_1 + \frac{1}{2}\angle ACA_2 = \frac{1}{2}\angle A_1CA_2$$

Таким образом угол $\angle A_1CA_2 = 2\alpha$; аналогично $\angle B_1CB_2 = 2\alpha$. Осталось выразить все неизвестные через a, b, α по теореме косинусов:

$$\frac{A_1A_2^2 + B_1B_2^2}{CA^2 + CB^2} = \frac{2a^2 - 2a^2\cos 2\alpha + 2b^2 - 2b^2\cos 2\alpha}{a^2 + b^2} = 2(1 - \cos 2\alpha) = 4\sin^2\alpha$$

Ответ: а) 2; б) 4.

6. (Клячко А.А.) Докажите, что система линейных уравнений с целыми коэффицентами разрешима в целых числах тогда и только тогда, когда она разрешима по любому модулю.

Решение:

Очевидно, что если целочисленная система линейных уравнений разрешима, то она разрешима и по любому модулю. Предположим теперь, что у нас есть система с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$, разрешимая по любому модулю. Элементарными преобразованиями эту систему можно привести к трапециевидной форме $Ax = b$ (также с целыми коэффициентами). Так как по предположению система разрешима по любому модулю, то в этой форме не будет строк, где ненулевым будет только свободный коэффициент. Пусть $M = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k > 0$, где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ — ведущие элементы строк матрицы A, которые без ограничения общности можно считать положительными. По условию $\exists\ x', c \in \mathbb{Z}^k : Ax' = b + Mc$. Найдём такой вектор $\Delta x \in \mathbb{Z}^n$, что $A\Delta x = -Mc$. Это можно сделать обратным ходом метода Гаусса, предполагая нулевыми все компоненты Δx, не соответствующие ведущим коэффициентам рассматриваемой на данном шаге строки. Тогда $x = x' + \Delta x$ будет решением исходной системы.