Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова
Казахстанский филиал

ПОСТУПАЕМ В КАЗАХСТАНСКИЙ ФИЛИАЛ МГУ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

Бакалавриат–2019

НАПРАВЛЕНИЯ «МАТЕМАТИКА», «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА»

Астана, 2019

УДК 378.4(470/574)](035)
ББК 74.58(2Рос+5Каз)я22
П63

Составители

Богомолов Сергей Владимирович **–** доктор физико-математических наук, профессор, МГУ имени М.В.Ломоносова

Семендяева Наталья Леонидовна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, МГУ имени М.В.Ломоносова

Щеглов Алексей Юрьевич **–** кандидат физико-математических наук, доцент, МГУ имени М.В.Ломоносова

Воронова Евгения Сергеевна – преподаватель, Казахстанский филиал МГУ имени М.В.Ломоносова

П63 Поступаем в Казахстанский филиал МГУ имени М.В.Ломоносова. Бакалавриат. Направления «Математика», «Прикладная математика и информатика» / С.В. Богомолов и др. – Астана : Казахстанский филиал МГУ имени М.В.Ломоносова, 2019. – 67 с.

ISBN 978-601-7804-64-0

Справочник содержит информацию о Казахстанском филиале МГУ имени М.В.Ломоносова. Перечислены основные направления подготовки бакалавриата и магистратуры. Подробно описаны вступительные испытания на направления «Математика» и «Прикладная математика и информатика». Даны варианты экзаменационных заданий по математике и физике (с решениями), а также по русскому языку (изложение).

Издание предназначено для учащихся 10-11 классов, выпускников школ и колледжей, абитуриентов высших учебных заведений.

УДК 378.4(470/574)](035)
ББК 74.58(2Рос+5Каз)я22

Уважаемые абитуриенты!

Казахстанский филиал Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова, созданный в 2001 году по инициативе Президента Республики Казахстан Н.А. Назарбаева и при активном содействии Президента Российской Федерации В.В. Путина, является составной частью, структурным подразделением МГУ имени М.В.Ломоносова. Он даёт возможность школьникам со всего Казахстана получить прекрасное образование, соответствующее высоким стандартам признанного во всём мире Московского государственного университета.

Знаменитые школы математиков МГУ и факультета вычислительной математики и кибернетики Московского университета обеспечивают высокое качество дипломов выпускников МГУ, которые признаются во всем мире.

Студенты старших курсов Филиала обучаются в Москве на факультетах МГУ. Благодаря высокому уровню образования выпускники Филиала востребованы на рынке труда. Все они трудоустроены по специальности в министерствах, ведущих международных и национальных компаниях, научных и исследовательских организациях. Выпускники Филиала добиваются больших успехов в своей деятельности и вносят большой вклад в развитие Республики Казахстан.

Приглашаем вас поступать в Филиал и стать частью семьи всемирно известного Московского университета, сделать верный шаг к упеху в жизни и профессиональной деятельности!

Директор Казахстанского филиала МГУ,
профессор А.В. Сидорович

Содержание

БАКАЛАВРИАТ КАЗАХСТАНСКОГО ФИЛИАЛА МГУ

Отличительными чертами обучения в Филиале являются его фундаментальный характер и практическая направленность, свойственные Московскому университету. Именно это позволяет МГУ занимать ведущие позиции в различных мировых и региональных рейтингах высших учебных заведений.

Студенты Казахстанского филиала обучаются **бесплатно**, **за счёт бюджетных средств, выделенных Республикой Казахстан в рамках государственного образовательного заказа.**

Обучение в Филиале осуществляется по **пяти направлениям бакалавриата**: «Математика», «Прикладная математика и информатика», «Филология», «Экология и природопользование», «Экономика». Срок обучения – 4 года.

Студенты Филиала направлений «Математика», «Прикладная математика и информатика» на 1-2 курсах обучаются в Астане у высокопрофессиональных преподавателей МГУ и Филиала, а на старших курсах направляются на включённое обучение на механико-математический факультет и факультет ВМК Московского университета, где защищают выпускную квалификационную работу и сдают государственный экзамен.

Проезд в Москву, проживание в общежитиях МГУ и страхование входят в стоимость государственного заказа.

По завершении обучения в бакалавриате все выпускники имеют **возможность поступить в магистратуру** по одному из следующих направлений: «Прикладная математика и информатика», «Филология» и «Экономика» (обучение за счёт бюджета РК) или выбрать одну из региональных магистерских программ: «Математические и компьютерные методы анализа», «Экономика регионального развития», «Управление природопользованием» (обучение за счёт средств местного бюджета). Срок обучения в магистратуре – 2 года.

Для того чтобы подать документы в Приёмную комиссию Филиала и пройти вступительные испытания, **не требуется сдавать ЕНТ, КТА** в Казахстане или ЕГЭ в России. Абитуриентам для подачи документов **необходимо иметь аттестат** об окончании средней школы **или диплом** об окончании среднего специального учебного заведения (колледжа, техникума или училища).

Вступительные испытания по направлениям бакалавриата:

- **«Математика» –** вступительные экзамены по математике и русскому языку.
- **«Прикладная математика и информатика»** – вступительные экзамены по математике, русскому языку, физике.
- **«Экология и природопользование»** – вступительные экзамены по-математике, русскому языку, географии.
- **«Экономика»** – вступительные экзамены по математике, русскому языку, иностранному языку.
- **«Филология»** – вступительные экзамены по литературе, русскому языку, иностранному языку.

Абитуриент имеет право подать документы **сразу на три направления** обучения. От выбранных направлений и их количества зависит то, какие вступительные экзамены нужно будет сдать. Например, подавая документы на «Математику» и «Прикладную математику и информатику», абитуриент должен сдать экзамены по математике и русскому языку, общие для этих двух направлений, а также экзамен по физике, обязательный для направления «Прикладная математика и информатика».

Приём документов в Казахстанском филиале МГУ имени М.В.Ломоносова осуществляется **с 21 июня по 10 июля 2019 г.** по адресу: г. Астана, улица Кажымукана, 11, Казахстанский филиал МГУ имени М.В.Ломоносова. Вступительные экзамены проходят в период **с 12 по 21 июля 2019 г.**

Для победителей и призёров Международных и Всероссийских олимпиад (например, олимпиады «Ломоносов»), поступающих в бакалавриат, предусмотрены льготы.

На время проведения экзаменов **иногородние** абитуриенты в Астане размещаются в общежитии. В случае успешного поступления **иногородним** студентам **предоставляется общежитие** на весь период обучения, как в Астане, так и в Москве.

Все экзамены проводятся письменно и длятся по 4 часа. Максимальная оценка за каждый экзамен – 100 баллов.

По завершении всех вступительных испытаний баллы, набранные абитуриентом на отдельные направления обучения, суммируются. Составляется рейтинговая таблица от максимального количества набранных баллов к минимальному, и абитуриенты, первые в таблице, рекомендуются к зачислению на бесплатное обучение за счёт государственного образовательного заказа Республики Казахстан в пределах выделенных бюджетных мест по направлениям.

Если по результатам экзаменов абитуриент проходит на несколько направлений, ему предлагается выбрать одно из них. Списки рекомендуемых к зачислению формируются в период с 23 по 25 июля.

Абитуриенты, не набравшие достаточное количество баллов для обучения на бюджетной основе, могут подать в приёмную комиссию заявления с просьбой о зачислении на платной основе (за счёт собственных средств). Решения по данным заявлениям принимаются Центральной приёмной комиссией МГУ имени М.В.Ломоносова в период с 1 по 7 августа.

Полный перечень документов, необходимых для поступления в Казахстанский филиал МГУ, а также дополнительная информация по приёму размещена на сайте Филиала *http://www.msu.kz* **в разделе «*Поступающим*».**

ПРИЧИНЫ ВЫБРАТЬ БАКАЛАВРИАТ КАЗАХСТАНСКОГО ФИЛИАЛА МГУ

- Казахстанский филиал – подразделение МГУ, одного из лучших университетов мира.
- Диплом МГУ имени М.В.Ломоносова единого образца для всех факультетов и филиалов по завершении обучения.
- **5 направлений бакалавриата и 3 направления магистратуры** в Казахстанском филиале МГУ. В процессе обучения студенты на младших курсах получают **фундаментальные знания по базовым дисциплинам** по каждому направлению обучения; на старших курсах, продолжая базовую подготовку, приобретают **навыки исследовательской, научной и практической работы** в выбранном самостоятельно направлении специализации, что можно сделать в широком диапазоне возможных интересов студентов с учётом имеющихся в МГУ более **300 кафедр,** ведущих учебную и научную работу. Возможности исследований определяются и наличием таких известных проектов как собственные **университетские орбитальные спутники** и **высокопроизводительные суперкомпьютеры,** используемые в вычислительных комплексах МГУ.
- Возможность продолжить после окончания очередной ступени образования **непрерывное обучение в магистратуре, аспирантуре и докторантуре** на более чем **40 факультетах МГУ,** например, на открытом в 2017 году факультете космических исследований, в магистратуре которого уже обучаются выпускники бакалавриата филиала.
- **125 первокурсников и 40 магистрантов на бюджетном финансировании** за счёт бюджетных средств, выделяемых в рамках государственного заказа Республики Казахстан, **с бесплатными для студентов обучением, проживанием** в общежитии МГУ на Воробьёвых горах в Москве, **бесплатными перелётами** Астана-Москва-Астана, **стипендией.**
- **Обучение в г. Астане на младших курсах:** занятия с преподавателями МГУ, регулярно приезжающими в Филиал; интересная студенческая жизнь (День первокурсника и посвящение в студенты, кросс «Золотая осень», недели языков, соревнования по шахматам и тогыз кумалак, Масленица, Наурыз, литературный клуб «Тенгри»); всем иногородним студентам предоставляются **места в новом комфортабельном общежитии** Казахстанского филиала МГУ.

- **Обучение в г. Москве на старших курсах:** на территории МГУ на Воробьёвых (Ленинских) горах в одном из самых экологически чистых районов Юго-Запада Москвы, где в шаговой доступности помимо учебных корпусов и общежитий располагаются многочисленные библиотеки с учебной и научной литературой, собственный комбинат питания, поликлиника, студенческий профилакторий, Дом культуры, плавательный бассейн и спортивные залы в Главном здании и корпусах МГУ, спортивный городок с легкоатлетических манежем, корпусом игровых залов, бейсбольным стадионом и открытыми площадками для различных видов спорта, бобслейный стартовый комплекс в Институте механики МГУ. В пешей доступности от двух станций метро «Университет» и «Ломоносовский проспект». В Москве постоянно функционируют более сотни театров и музеев.

МАТЕРИАЛЫ К ВСТУПИТЕЛЬНЫМ ИСПЫТАНИЯМ

Материалы к вступительным испытаниям по математике

Продолжительность письменного экзамена по математике составляет 4 часа. За это время абитуриент должен успеть решить 8 задач экзаменационного билета в черновике, проверить решения и переписать их в чистовик. Задания в билете располагаются в порядке возрастания их объективной сложности. Если на решение задачи из первой части билета подготовленному абитуриенту хватит и двадцати минут, то две последние задачи могут потребовать существенно больших временных затрат.

Следует обратить внимание на то, что, несмотря на различную сложность, задачи дают равный вклад в итоговую оценку работы. Поэтому целесообразно в начале экзамена просмотреть условия задач и определить свой, субъективный порядок их решения, от самой простой, с точки зрения абитуриента, до самой сложной. Порядок рассмотрения задач абитуриентом может не совпадать с порядком задач в билете, но оригинальную нумерацию задач следует сохранять.

При решении задач можно и нужно пользоваться определениями, свойствами и теоремами, которые входят в Программу вступительных испытаний по математике (приведена ниже), при этом теоремы доказывать не требуется. Однако если решение абитуриента основано на утверждениях, не упомянутых в Программе для поступающих, оно должно содержать и доказательства таких утверждений. В противном случае решение будет расценено как недостаточно обоснованное, и балл за эту задачу будет снижен.

В чистовике должен быть указан номер задачи, приведено её решение без ошибок и ответ. Решение должно быть настолько подробным, чтобы его смог понять человек, не столь уверенно владеющий навыками решения математических задач, как сдающий экзамен абитуриент. Прежде чем написать ответ, следует ещё раз внимательно прочитать условие задачи и убедиться в том, что найдено значение требуемой величины. Отсутствие слова «Ответ» и самого ответа в чистовике может трактоваться как незаконченное решение, что также может привести к снижению балла.

Следует помнить, что правильный ответ ещё не является гарантией правильности решения. Если абитуриент получил верный ответ, но при этом допустил несколько ошибок, и последняя ошибка скомпенсировала вред, нанесённый предыдущими, то решение будет признано неверным, и задача не будет засчитана. Поэтому необходимо обращать внимание на правильность логических выводов и избегать вычислительных ошибок – самых обидных ошибок письменного экзамена по математике!

Программа вступительных испытаний по математике

Программа располагается в регулярно обновляемом разделе «Информация для поступающих, программы вступительных экзаменов» сайта МГУ имени М.В.Ломоносова по адресу *http://www.msu.ru/entrance/program/math.html*. Программа состоит из трёх разделов.

В первом разделе перечислены основные математические понятия, которыми должен владеть поступающий. Второй раздел представляет собой перечень теоретических вопросов. В третьем разделе указано, какие навыки и умения требуются от поступающего на экзамене по математике.

Объём знаний и степень владения материалом, описанным в программе, соответствуют курсу математики средней школы. Поступающий может пользоваться всем арсеналом средств из этого курса, включая и начала анализа. Однако для решения экзаменационных задач достаточно уверенного владения лишь теми понятиями и их свойствами, которые перечислены в настоящей программе. Объекты и факты, не изучаемые в общеобразовательной школе, также могут использоваться поступающими, но при условии, что он способен их пояснять и доказывать.

В связи с обилием учебников и регулярным их переизданием отдельные утверждения второго раздела могут в некоторых учебниках называться иначе, чем в программе, или формулироваться в виде задач, или вовсе отсутствовать. Такие случаи не освобождают поступающего от необходимости знать эти утверждения.

Основные понятия

1. Натуральные числа. Делимость. Простые и составные числа. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное.
2. Целые, рациональные и действительные числа. Проценты. Модуль числа, степень, корень, арифметический корень, логарифм. Синус, косинус, тангенс, котангенс числа (угла). Арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс числа.

3. Числовые и буквенные выражения. Равенства и тождества.
4. Функция, её область определения и область значений. Возрастание, убывание, периодичность, чётность, нечётность. Наибольшее и наименьшее значения функции. График функции.
5. Линейная, квадратичная, степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические функции.
6. Уравнение, неравенства, система. Решения (корни) уравнения, неравенства, системы. Равносильность.
7. Арифметическая и геометрическая прогрессии.
8. Прямая на плоскости. Луч, отрезок, ломаная, угол.
9. Треугольник. Медиана, биссектриса, высота.
10. Выпуклый многоугольник. Квадрат, прямоугольник, параллелограмм, ромб, трапеция. Правильный многоугольник. Диагональ.
11. Окружность и круг. Радиус, хорда, диаметр, касательная, секущая. Дуга окружности и круговой сектор. Центральный и вписанные углы.
12. Прямая и плоскость в пространстве. Двугранный угол.
13. Многогранник. Куб, параллелепипед, призма, пирамида.
14. Цилиндр, конус, шар, сфера.
15. Равенство и подобие фигур. Симметрия.
16. Параллельность и перпендикулярность прямых, плоскостей. Скрещивающиеся прямые. Угол между прямыми, плоскостями, прямой и плоскостью.
17. Касание. Вписанные и описанные фигуры на плоскости и в пространстве. Сечение фигуры плоскостью.
18. Величина угла. Длина отрезка, окружности и дуги окружности. Площадь многоугольника, круга и кругового сектора. Площадь поверхности и объём многогранника, цилиндра, конуса, шара.
19. Координатная прямая. Числовые промежутки. Декартовы координаты на плоскости и в пространстве. Векторы.

Содержание теоретической части экзамена

Алгебра

1. Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10.
2. Свойства числовых неравенств.
3. Формулы сокращённого умножения.
4. Свойства линейной функции и её график.

5. Формула корней квадратного уравнения. Теорема о разложении квадратного трёхчлена на линейные множители. Теорема Виета.
6. Свойства квадратичной функции и её график.
7. Неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое двух чисел. Неравенство для суммы двух взаимно обратных чисел.
8. Формулы общего члена и суммы n первых членов арифметической прогрессии.
9. Формулы общего члена и суммы n первых членов геометрической прогрессии.
10. Свойства степеней с натуральными и целыми показателями. Свойства арифметических корней n-й степени. Свойства степеней с рациональными показателями.
11. Свойства степенной функции с целым показателем и её график.
12. Свойства показательной функции и её график.
13. Основное логарифмическое тождество. Логарифмы произведения, степени, частного. Формула перехода к новому основанию.
14. Свойства логарифмической функции и её график.
15. Основное тригонометрическое тождество. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента. Формулы приведения, сложения, двойного и половинного аргумента, суммы и разности тригонометрических функций. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента. Преобразование произведения синусов и косинусов в сумму. Преобразование выражения $a\sin x + b\cos x$ с помощью вспомогательного аргумента.
16. Формулы решений простейших тригонометрических уравнений.
17. Свойства тригонометрических функций и их графики.

Геометрия

1. Теоремы о параллельных прямых на плоскости.
2. Свойства вертикальных и смежных углов.
3. Свойства равнобедренного треугольника.
4. Признаки равенства треугольников.
5. Теорема о сумме внутренних углов треугольника. Теорема о внешнем угле треугольника. Свойства средней линии треугольника.
6. Теорема Фалеса. Признаки подобия треугольников.

7. Признаки равенства и подобия прямоугольных треугольников. Пропорциональность отрезков в прямоугольном треугольнике. Теорема Пифагора.
8. Свойство серединного перпендикуляра к отрезку. Свойство биссектрисы угла.
9. Теоремы о пересечении медиан, пересечении биссектрис и пересечении высот треугольника.
10. Свойство отрезков, на которые биссектриса треугольника делит противоположную сторону.
11. Свойство касательной к окружности. Равенство касательных, проведённых из одной точки к окружности. Теоремы о вписанных углах. Теорема об угле, образованном касательной и хордой. Теоремы об угле между двумя пересекающимися хордами и об угле между двумя секущими, выходящими из одной точки. Равенство произведений отрезков двух пересекающихся хорд. Равенство квадрата касательной произведению секущей на её внешнюю часть.
12. Свойство четырёхугольника, вписанного в окружность. Свойство четырёхугольника, описанного около окружности.
13. Теорема об окружности, вписанной в треугольник. Теорема об окружности, описанной около треугольника.
14. Теоремы синусов и косинусов для треугольника.
15. Теорема о сумме внутренних углов выпуклого многоугольника.
16. Признаки параллелограмма. Свойства параллелограмма.
17. Свойства средней линии трапеции.
18. Формула для вычисления расстояния между двумя точками на координатной плоскости. Уравнение окружности.
19. Теоремы о параллельных прямых в пространстве. Признак параллельности прямой и плоскости. Признак параллельности плоскостей.
20. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Теорема об общем перпендикуляре к двум скрещивающимся прямым. Признак перпендикулярности плоскостей. Теорема о трёх перпендикулярах.

Требования к поступающему

На экзамене по математике поступающий должен уметь:

1. выполнять (без калькулятора) действия над числами и числовыми выражениями; преобразовывать буквенные выражения; производить операции над векторами (сложение, умножение на число, скалярное

произведение); переводить одни единицы измерения величин в другие;

2. сравнивать числа и находить их приближённые значения (без калькулятора); доказывать тождества и неравенства для буквенных выражений;
3. решать уравнения, неравенства, системы (в том числе с параметрами) и исследовать их решения;
4. исследовать функции; строить графики функций и множества точек на координатной плоскости, заданные уравнениями и неравенствами;
5. изображать геометрические фигуры на чертеже; делать дополнительные построения; строить сечения; исследовать взаимное расположение фигур; применять признаки равенства, подобия фигур и их принадлежности к тому или иному виду;
6. пользоваться свойствами чисел, векторов, функций и их графиков, свойствами арифметической и геометрической прогрессий;
7. пользоваться свойствами геометрических фигур, их характерных точек, линий и частей, свойствами равенства, подобия и взаимного расположения фигур;
8. пользоваться соотношениями и формулами, содержащими модули, степени, корни, логарифмические, тригонометрические выражения, величины углов, длины, площади, объёмы;
9. составлять уравнения, неравенства и находить значения величин, исходя из условия задачи;
10. излагать и оформлять решение логически правильно, полно и последовательно, с необходимыми пояснениями.

Задания вступительных испытаний по математике

Вариант М.2018-1

1. Какое целое число задано выражением $\dfrac{\sqrt{8}\left(\dfrac{5}{3}+\dfrac{1}{5}\right)}{\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{5}\right)\sqrt{32}}$?

2. Решите уравнение $\sqrt{10x+6}=5x-9$.

3. Решите неравенство $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{x}} \le \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{3-x}}$.

4. В геометрической прогрессии 50 членов (все положительные). Если просуммировать логарифмы по основанию 2 от каждого члена прогрессии, тополучится 1325. Если вычислить сумму логарифмов по основанию 2 только первых 30членов, то получится 495. Вычислите сумму первых 10 членов прогрессии.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} 5\sin y - 3\sqrt{5}\cos x = 7 - 2\cos^2 y, \\ \operatorname{tg} x = 2. \end{cases}$

6. В треугольнике ABC со сторонами AB = 4, BC = 5, AC = 6 проведены высоты AH_1, BH_2, CH_3. Найдите отношение длин отрезков $H_1H_3 : H_2H_3$.

7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left|(2-a)x - a\right| = (2-a)(x+1)^2 + 2ax - 2x + 2a$$

имеет ровно одно решение.

8. В треугольной пирамиде $SABC$ длины всех рёбер одинаковы. Точка M в пространстве такова, что $MA = MB = MC = \sqrt{3}$ см и прямая AM пересекается с высотой треугольника SBC, опущенной из вершины B. Найдите объём пирамиды $SABC$.

Вариант М.2018-2

1. Какое целое число задано выражением $\frac{2,6 \cdot 2,3}{2,99}$?

2. Какое число больше: $\sqrt[3]{18} + \sqrt{2}$ или 4? (Ответ обосновать.)

3. Решите неравенство $\frac{7 - x + |9 - x|}{|x - 10| - 1} \le 2$.

4. Решите уравнение $2 + 6\sin^2 x + \cos 4x = \frac{4}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} 4 \cdot 2^{5x+2y} + 8 \cdot 2^{3x+2y} = 33, \\ \sqrt{2x^2 + xy + x + 1} = \sqrt{1 + x}. \end{cases}$

6. Четырёхугольник $ABCD$ с диагоналями $AC = 7$ см и BD=5 см вписан в окружность. Известно, что сумма углов ABD и BDC равна 60°. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.
7. Решите неравенство
$$\frac{\log_5(1+x)\cdot\log_{49}(1+3x)}{x^2-x} \ge \frac{\log_7(1+x)\cdot\log_{25}(1+3x)}{x^2+5}.$$
8. В правильной 6-угольной пирамиде длина бокового ребра в 2 раза больше, чем длина стороны основания. Какую долю от объёма пирамиды составляет объём вписанного в неё шара?

Решения вступительных испытаний по математике

Вариант М.2018-1

1. Какое целое число задано выражением $\dfrac{\sqrt{8}\left(\dfrac{5}{3}+\dfrac{1}{5}\right)}{\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{5}\right)\sqrt{32}}$?

Решение. Поскольку $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, $\sqrt{32}=4\sqrt{2}$, дробь можно сократить на иррациональное число $\sqrt{2}$. Затем приведём суммы рациональных чисел к общим знаменателям и сократим числитель и знаменатель на общие целочисленные множители:
$$\frac{2\sqrt{2}(5\cdot5+3)15}{15(2\cdot5-3)4\sqrt{2}}=\frac{28}{7\cdot2}=2.$$

Ответ: 2.

2. Решите уравнение $\sqrt{10x+6}=5x-9$.

Решение. Перейдём к равносильной системе:
$$\sqrt{10x+6}=5x-9 \Leftrightarrow \begin{cases}5x-9\ge0,\\ 10x+6=(5x-9)^2;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge\dfrac{9}{5},\\ 25x^2-100x+75=0.\end{cases}$$

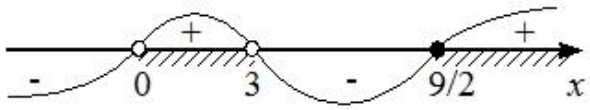
Решим квадратное уравнение: $D=100^2-4\cdot25\cdot75=100\cdot25$, корни $x_{1,2}=\dfrac{100\pm50}{50}$. Меньший корень $x_1=1$ не удовлетворяет неравенству, больший корень $x_2=3$ подходит.

Ответ: 3.

3. Решите неравенство $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{x}} \le \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{3-x}}$.

Решение. Заметим, что $\frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$, $\frac{9}{4} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$. Значит, неравенство можно переписать в виде $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{6}{x}} \le \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{-2}{3-x}}$. Поскольку основание степени меньше единицы, последнее неравенство равносильно следующему: $\frac{6}{x} \ge \frac{-2}{3-x}$. Решим его методом интервалов:

$$\frac{6}{x} + \frac{2}{3-x} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{6(3-x)+2x}{x(3-x)} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{18-4x}{x(3-x)} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{2x-9}{x(x-3)} \ge 0 \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow x \in (0,3) \cup \left[\frac{9}{2}, +\infty\right).$$

Ответ: $(0,3) \cup \left[\frac{9}{2}, +\infty\right)$.

4. В геометрической прогрессии 50 членов (все положительные). Если просуммировать логарифмы по основанию 2 от каждого члена прогрессии, то получится 1325. Если вычислить сумму логарифмов по основанию 2 только первых 30 членов, то получится 495. Вычислите сумму первых 10 членов прогрессии.

Решение. Обозначим через (b_n) геометрическую прогрессию с первым членом $b_1 > 0$ и знаменателем $q > 0$. Составим систему уравнений, соответствующую условию задачи:

$$\begin{cases} \log_2 b_1 + \log_2 b_2 + \ldots + \log_2 b_{50} = 1325, \\ \log_2 b_1 + \log_2 b_2 + \ldots + \log_2 b_{30} = 495; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 (b_1 b_2 \ldots b_{50}) = 1325, \\ \log_2 (b_1 b_2 \ldots b_{30}) = 495; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1 b_2 \ldots b_{50} = 2^{1325}, \\ b_1 b_2 \ldots b_{30} = 2^{495}. \end{cases}$$

В каждом уравнении полученной системы воспользуемся формулой общего члена геометрической прогрессии:

$$\begin{cases}(b_1)^{50} q^{1+2+...+49} = 2^{1325}, \\ (b_1)^{30} q^{1+2+...+29} = 2^{495};\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(b_1)^{50} q^{1225} = 2^{1325}, \\ (b_1)^{30} q^{435} = 2^{495};\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(b_1)^{2} q^{49} = 2^{53}, \\ (b_1)^{2} q^{29} = 2^{33}.\end{cases}$$

Решение последней системы легко находится: $q = 2,\ b_1 = 4$. Осталось вычислить сумму первых 10 членов прогрессии:

$$S_{10} = b_1 \frac{q^{10} - 1}{q - 1} = 4 \frac{1024 - 1}{2 - 1} = 4092.$$

Ответ: 4092.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases}5\sin y - 3\sqrt{5}\cos x = 7 - 2\cos^2 y, \\ \operatorname{tg} x = 2.\end{cases}$

Решение. Решением второго уравнения является совокупность двух серий: $\left[\begin{array}{l} x = \operatorname{arctg} 2 + 2\pi n,\ \ n \in Z; \\ x = \operatorname{arctg} 2 + \pi + 2\pi m,\ \ m \in Z. \end{array}\right.$

1) Точки первой серии $x = \operatorname{arctg} 2 + 2\pi n,\ \ n \in Z,$ принадлежат первой четверти; $\sin x = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Первое уравнение принимает вид

$$5\sin y - 3 = 7 - 2\cos^2 y \Leftrightarrow 2\sin^2 y - 5\sin y + 8 = 0.$$

Поскольку $D = 25 - 64 < 0$, решений у системы нет.

2) Точки второй серии $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi + 2\pi m,\ \ m \in Z,$ принадлежат третьей четверти; $\sin x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Подставим эти значения в первое уравнение:

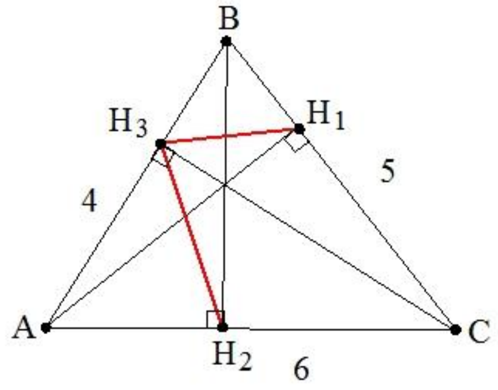
$$5\sin y + 3 = 7 - 2\cos^2 y \Leftrightarrow 2\sin^2 y - 5\sin y + 2 = 0.$$

$D = 25 - 16 = 9$. Значит, $\sin y = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$, $y = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ \ n \in Z$.

Второй корень квадратного уравнения не подходит, поскольку он больше единицы.

Ответ: $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi + 2\pi m,\ \ y = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n;\ \ m, n \in Z$.

6. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 4$, $BC = 5$, $AC = 6$ проведены высоты AH_1, BH_2, CH_3. Найдите отношение длин отрезков $H_1H_3 : H_2H_3$.

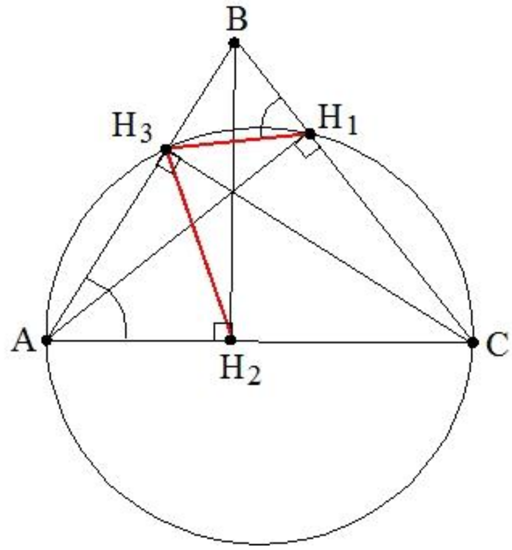


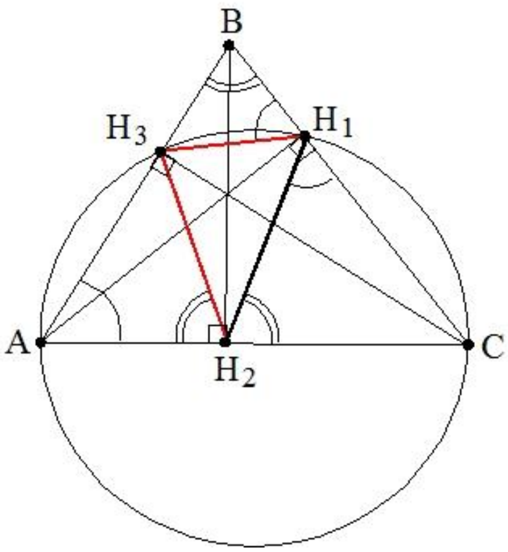
Решение. Докажем, что треугольник ABC остроугольный. Для этого достаточно показать, что косинус угла, лежащего против большей стороны, положителен. По теореме косинусов

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC,$$
$$36 = 16 + 25 - 2\cdot 4\cdot 5\cdot\cos\angle ABC,$$

откуда $\cos\angle ABC = \dfrac{25+16-36}{40} > 0$. Значит, точка пересечения высот лежит внутри треугольника.

Поскольку $\angle AH_3C = \angle AH_1C = 90°$, четырёхугольник AH_3H_1C вписан в окружность с диаметром AC. Значит, $\angle BAC = \angle BH_1H_3 = \alpha$, так как $\angle CH_1H_3 = 180° - \angle H_3AC$. По той же схеме доказывается, что $\angle CH_1H_2 = \alpha$ и $\angle ABC = \angle CH_2H_1 =$ $= \angle AH_2H_3 = \beta$.





По теореме синусов для $\Delta H_1H_2H_3$

$$\frac{H_1H_3}{\sin(180°-2\beta)} = \frac{H_2H_3}{\sin(180°-2\alpha)},$$

$$\frac{H_1H_3}{H_2H_3} = \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}.$$

По теореме синусов для ΔABC

$$\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin\beta},$$

откуда $\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{6}{5}$.

Осталось найти отношение $\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$. Для этого воспользуемся теоремой косинусов для ΔABC:

$$\cos\beta = \frac{25+16-36}{40} = \frac{1}{8},\ \cos\alpha = \frac{16+36-25}{48} = \frac{27}{48} = \frac{9}{16}.$$

В итоге $\dfrac{H_1H_3}{H_2H_3} = \dfrac{6}{5}\cdot\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{16}{9} = \dfrac{4}{15}$.

Ответ: $\dfrac{4}{15}$.

7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left|(2-a)x-a\right| = (2-a)(x+1)^2 + 2ax - 2x + 2a$$

имеет ровно одно решение.

Решение. Введём обозначения: $b = 2-a$, $y = x+1$. В новых обозначениях уравнение принимает вид $|by-2| = by^2 - 2(b-1)y + 2$. Необходимо найти такие значения параметра b, при которых полученное уравнение имеет ровно одно решение.

Рассмотрим три случая.

1) При $b=0$ получаем уравнение $2 = 2y+2$. Оно имеет единственное решение $y=0$. Значит, значение $b=0$ подходит.

2) $$\begin{cases} by-2 \le 0, \\ 2-by = by^2 + 2(1-b)y + 2, \\ b \ne 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} by \le 2, \\ by^2 + (2-b)y = 0, \\ b \ne 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} by \le 2, \\ \left[\begin{array}{l} y = 0; \\ y = \dfrac{b-2}{b}; \end{array}\right. \\ b \ne 0. \end{cases}$$

Значение $y=0$ удовлетворяет условию $by \le 2$ для любого значения b. Значение $y = \dfrac{b-2}{b}$ удовлетворяет условию $by \le 2$ при $b \le 4$. Корни совпадают при $b=2$. Значит, при $b \in (-\infty, 2) \cup (2, 4]$ есть два различных решения, и эти значения параметра не подходят. Если же $b \in \{2\} \cup (4, +\infty)$, то в случае 2) задача имеет единственное решение.

3) $\begin{cases} by-2>0, \\ by-2=by^2+2(1-b)y+2, \\ b\neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} by>2, \\ by^2+(2-3b)y+4=0, \\ b\neq 0. \end{cases}$

Необходимо найти такие значения параметра b из множества $\{2\}\cup(4,+\infty)$, при которых данная система не имеет решений.

При $b=2$ система упрощается:

$$\begin{cases} y>1, \\ y^2-2y+2=0. \end{cases}$$

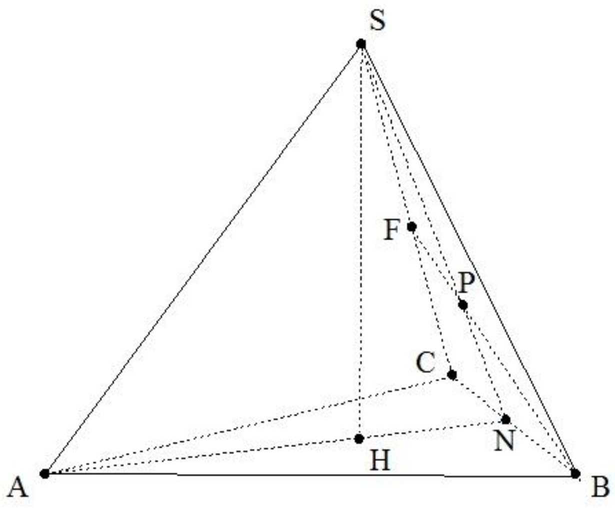
Квадратное уравнение не имеет действительных корней, поэтому система не имеет решений. Значение $b=2$ удовлетворяет условию задачи.

При $b>4$ значение квадратичной функции $f(y)=by^2+(2-3b)y+4$ в точке $y=\dfrac{2}{b}$ отрицательное ($f\left(\dfrac{2}{b}\right)=\dfrac{8-2b}{b}<0$ при $b>4$), поэтому правее точки $y=\dfrac{2}{b}$ квадратное уравнение с положительным старшим коэффициентом имеет хотя бы один корень. Значит, все $b>4$ не подходят.

Итак, получены два значения параметра b: $b=0$ и $b=2$. Им соответствуют $a=2$ и $a=0$.

Ответ: $a=0$ и $a=2$.

8. В треугольной пирамиде $SABC$ длины всех рёбер одинаковы. Точка M в пространстве такова, что $MA=MB=MC=\sqrt{3}$ см и прямая AM пересекается с высотой треугольника SBC**,** опущенной из вершины B. Найдите объём пирамиды $SABC$.



Решение. Обозначим через a длину ребра пирамиды $SABC$. Тогда площадь её основания

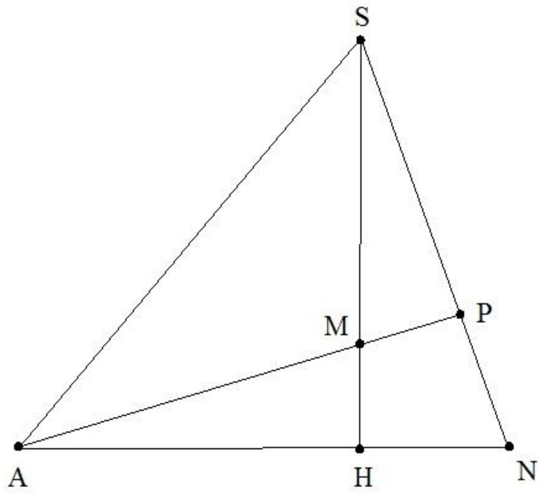
$$S_{ABC}=\frac{1}{2}a^2\frac{\sqrt{3}}{2}=a^2\frac{\sqrt{3}}{4},$$

высота основания $AN = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\frac{\sqrt{3}}{2}$, высота пирамиды $SH = \sqrt{a^2 - \left(\frac{2}{3}a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$; объём пирамиды

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot SH = \frac{1}{3}a^2\frac{\sqrt{3}}{4}a\sqrt{\frac{2}{3}} = a^3\frac{\sqrt{2}}{12}.$$

Найдём длину ребра a. Для этого рассмотрим сечение пирамиды плоскостью SAN, проходящей через вершины S, A и середину N ребра BC. Заметим, что в этой плоскости лежит и высота пирамиды SH.

По условию точка M равноудалена от вершин основания пирамиды. Значит, она лежит на перпендикуляре к плоскости ABC, проходящем через центр треугольника ABC – точку H. Значит, прямая AM принадлежит плоскости SAN. Из условия известно также, что прямая AM пересекается с высотой BF треугольника SBC, опущенной из вершины B. Значит, прямая AM проходит через центр боковой грани SBC – точку P.



Поскольку прямая AM проходит через центр правильного треугольника SBC, она является высотой пирамиды, опущенной на основание SBC. Значит, $AP \perp SN$. Итак, в равнобедренном треугольнике SAN $(AN = NS)$ отрезки AP и SH – высоты, проведённые к боковым сторонам. Значит, $AP = SH$ и $AM = SM = \sqrt{3}$.

В прямоугольном треугольнике APN $\sin\angle NAP = \frac{PN}{AN} = \frac{1}{3}$, тогда $\cos\angle NAP = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, и из прямоугольного треугольника AHM можно найти длину ребра пирамиды:

$$AH = AM\cos\angle NAP,\ \frac{a}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\frac{2\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow a = 2\sqrt{2}\ \text{(см)}.$$

Последний шаг:

$$V_{SABC} = a^3\frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{\left(2\sqrt{2}\right)^3\sqrt{2}}{12} = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}\ (\text{см}^3).$$

Ответ: $\frac{8}{3}$ см^3.

Вариант М.2018-2

1. Какое целое число задано выражением $\frac{2,6\cdot 2,3}{2,99}$?

Решение. Умножим числитель и знаменатель дроби на 100 и разложим составные числа на простые множители:

$$\frac{2,6\cdot 2,3}{2,99} = \frac{26\cdot 23}{299} = \frac{2\cdot 13\cdot 23}{13\cdot 23} = 2.$$

Ответ: 2.

2. Какое число больше: $\sqrt[3]{18}+\sqrt{2}$ или 4? (Ответ обосновать.)

Решение. Составим формальное неравенство:

$$\sqrt[3]{18}+\sqrt{2} \vee 4;\quad \sqrt[3]{18} \vee 4-\sqrt{2}.$$

Возведём полученное неравенство в куб и приведём подобные слагаемые:

$$18 \vee 64-48\sqrt{2}+24-2\sqrt{2};\ \ 50\sqrt{2} \vee 70;\ \ 5\sqrt{2} \vee 7.$$

Возведём неравенство в квадрат: $50 > 49$. Значит, первое число больше.

Ответ: первое число больше.

3. Решите неравенство $\frac{7-x+|9-x|}{|x-10|-1} \le 2$.

Решение. Перепишем в виде $\frac{7-x+|x-9|}{|x-10|-1} \le 2$ и рассмотрим три случая.

1) При $x<9$ оба подмодульных выражения отрицательны; раскроем модули и решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{7-x-x+9}{10-x-1} \le 2 \Leftrightarrow \frac{16-2x}{9-x}-2 \le 0 \Leftrightarrow \frac{16-2x-18+2x}{9-x} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x-9} \le 0 \Leftrightarrow x < 9.$$

2) При $9 \le x \le 10$ получаем неравенство

$$\frac{7-x+x-9}{10-x-1} \le 2 \Leftrightarrow \frac{-2}{9-x} - 2 \le 0 \Leftrightarrow \frac{-2-18+2x}{9-x} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-10}{x-9} \ge 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 9) \cup [10, +\infty).$$

С учётом условия $9 \le x \le 10$ остаётся единственное решение $x = 10$.

3) Наконец, при $x > 10$ получаем неравенство

$$\frac{7-x+x-9}{x-10-1} \le 2 \Leftrightarrow \frac{-2}{x-11} - 2 \le 0 \Leftrightarrow \frac{-2-2x+22}{x-11} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-10}{x-11} \ge 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 10] \cup (11, +\infty).$$

С учётом условия $x > 10$ остаётся луч $x > 11$.

Ответ: $(-\infty, 9) \cup \{10\} \cup (11, +\infty)$.

4. Решите уравнение $2 + 6\sin^2 x + \cos 4x = \dfrac{4}{1+\operatorname{tg}^2 x}$.

Решение. ОДЗ: $\cos x \ne 0$. Воспользуемся на ОДЗ соотношением $1+\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$: $\quad 2 + 6\sin^2 x + \cos 4x = 4\cos^2 x$.

Применим формулы понижения степени и формулу косинуса двойного аргумента и сведём полученное уравнение к квадратному относительно $\cos 2x$:

$$2 + 3(1-\cos 2x) + 2\cos^2 2x - 1 = 2(1+\cos 2x).$$

Сделаем замену переменной $t = \cos 2x$:

$$2 + 3(1-t) + 2t^2 - 1 = 2(1+t) \Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0.$$

Корни квадратного уравнения $t_1 = 2 > 1$ (не подходит) и $t_2 = \dfrac{1}{2}$. Обратная замена:

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ \ n \in \mathrm{Z} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ \ n \in \mathrm{Z}.$$

Найденные решения принадлежат ОДЗ.

Ответ: $\pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ \ n \in \mathrm{Z}$.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} 4\cdot 2^{5x+2y}+8\cdot 2^{3x+2y}=33, \\ \sqrt{2x^2+xy+x+1}=\sqrt{1+x}. \end{cases}$

Решение. Возведём второе уравнение в квадрат на ОДЗ:

$$\sqrt{2x^2+xy+x+1}=\sqrt{1+x} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+x\ge 0, \\ 2x^2+xy=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1, \\ \left[\begin{array}{l} x=0; \\ y=-2x. \end{array}\right. \end{cases}$$

Далее рассмотрим два случая.

$$1)\ \begin{cases} 4\cdot 2^{5x+2y}+8\cdot 2^{3x+2y}=33, \\ x=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12\cdot 2^{2y}=33, \\ x=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2y}=\dfrac{33}{12}, \\ x=0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y=\log_2\dfrac{33}{12}, \\ x=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{33}{12}, \\ x=0. \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} 4\cdot 2^{5x-4x}+8\cdot 2^{3x-4x}=33, \\ x\ge -1, \\ y=-2x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\cdot 2^{x}+8\cdot 2^{-x}=33, \\ x\ge -1, \\ y=-2x. \end{cases}$$

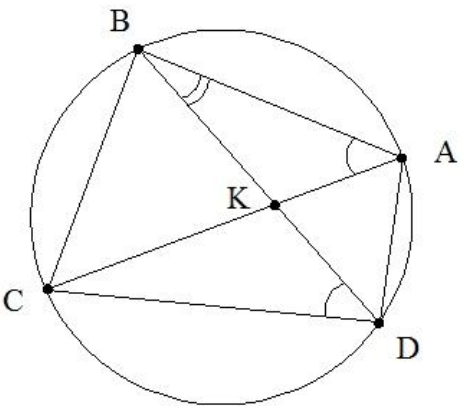
В уравнении $4\cdot 2^x+8\cdot 2^{-x}=33$ сделаем замену переменной $z=2^x>0$:

$$4z+\frac{8}{z}=33 \Leftrightarrow \frac{4z^2-33z+8}{z}=0.$$

$D=(-33)^2-4\cdot 4\cdot 8=961$, корни числителя $z_1=\dfrac{1}{4}$ и $z_2=8$. В первом случае получаем $x=-2<-1$ (не подходит); во втором случае $x=3$, $y=-6$.

Ответ: $\left(0, \dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{33}{12}\right)$; $(3,-6)$.

6. Четырёхугольник *ABCD* с диагоналями *AC* = 7 см и *BD* = 5 см вписан в окружность. Известно, что сумма углов *ABD* и *BDC* равна 60°. Найдите площадь четырёхугольника *ABCD*.



Решение. Рассмотрим четырёхугольник *ABCD*, вписанный в окружность. Обозначим через *K* точку пересечения его диагоналей. По условию $\angle ABD + \angle BDC = 60^\circ$.

Заметим, что $\angle BDC = \angle BAC$ как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу BC. Значит, в ΔABK $\angle AKB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Теперь можно вычислить площадь $ABCD$:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} 7 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{35\sqrt{3}}{4}. \quad \textit{Ответ}: \frac{35\sqrt{3}}{4}.$$

7. Решите неравенство

$$\frac{\log_5(1+x) \cdot \log_{49}(1+3x)}{x^2 - x} \geq \frac{\log_7(1+x) \cdot \log_{25}(1+3x)}{x^2+5}.$$

Решение. Выпишем ОДЗ: $\begin{cases} 1+x>0, \\ 1+3x>0, \\ x \neq 0, \\ x \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right) \cup (0,1) \cup (1, +\infty)$.

Перейдём в логарифмах к основанию 5:

$$\frac{\log_5(1+x) \cdot \log_5(1+3x)}{2\log_5 7 \cdot \left(x^2 - x\right)} \geq \frac{\log_5(1+x) \cdot \log_5(1+3x)}{\log_5 7 \cdot \left(x^2+5\right) \cdot 2}.$$

Перенесём слагаемые в левую часть неравенства и разложим разность на множители:

$$\frac{\log_5(1+x) \cdot \log_5(1+3x)}{2\log_5 7 \cdot \left(x^2 - x\right)} - \frac{\log_5(1+x) \cdot \log_5(1+3x)}{2\log_5 7 \cdot \left(x^2+5\right)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_5(1+x) \cdot \log_5(1+3x)}{2\log_5 7} \left(\frac{1}{x^2 - x} - \frac{1}{x^2+5} \right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_5(1+x) \cdot \log_5(1+3x)}{2\log_5 7} \left(\frac{1}{x^2 - x} - \frac{1}{x^2+5} \right) \geq 0.$$

Воспользуемся методом рационализации на ОДЗ и учтём положительную определённость множителей $\log_5 7$ и x^2+5:

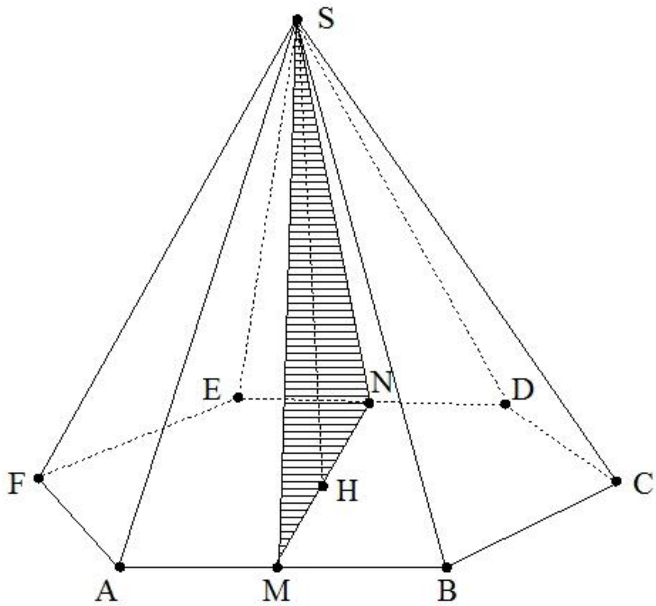
$$\frac{(1+x-1)(1+3x-1)\left(x^2+5-x^2+x\right)}{\left(x^2-x\right)\left(x^2+5\right)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2(x+5)}{x(x-1)} \geq 0.$$

Решим неравенство методом интервалов: $x \in [-5, 0) \cup (1, +\infty)$. Пересекая с ОДЗ, получим $x \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right) \cup (1, +\infty)$.

Ответ: $\left(-\frac{1}{3}, 0\right) \cup (1, +\infty)$.

8. В правильной 6-угольной пирамиде длина бокового ребра в 2 раза больше, чем длина стороны основания. Какую долю от объёма пирамиды составляет объём вписанного в неё шара?

Решение. Обозначим через a длину ребра основания пирамиды $SABCDEF$. Тогда длина её бокового ребра равна $2a$.



Площадь основания пирамиды

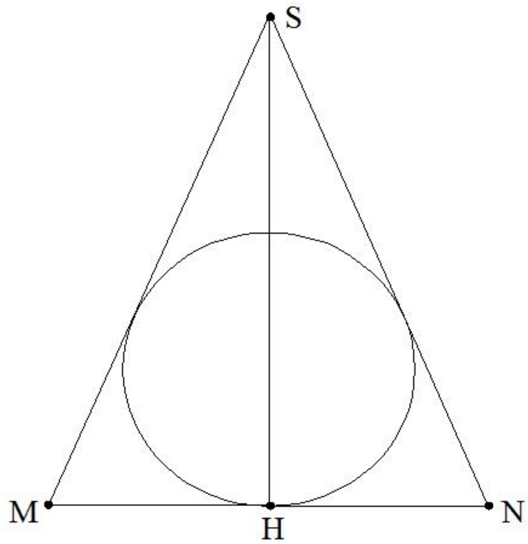
$$S_{ABCDEF} = 6\left(\frac{1}{2}a^2\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2},$$

высота (из ΔSAH по теореме Пифагора)

$$SH = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3},$$

объём пирамиды

$$V_{SABCDEF} = \frac{1}{3}S_{ABCDEF}\cdot SH = \frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}\cdot a\sqrt{3} = \frac{3a^3}{2}.$$



Шар, вписанный в пирамиду, касается основания в центре правильного шестиугольника (в точке H), а боковых граней – в точках, принадлежащих апофемам. Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью MSN, проходящей через её вершину S и апофемы SM и SN боковых граней SAB и SDE. Из ΔABH

$MH = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} = HN$. Тогда $S_{MSN} = MH\cdot SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot a\sqrt{3} = \frac{3a^2}{2}$. С другой стороны, $S_{MSN} = pr$, где p – полупериметр треугольника, r – радиус вписанной окружности. Поскольку (из ΔSAB)

$$SM = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{15}}{2} = SN\ ,$$

получаем уравнение для r (радиуса вписанного в пирамиду шара и радиуса вписанной в ΔSMN окружности):

$$\left(\frac{a\sqrt{15}}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2}\right) r = \frac{3a^2}{2},\ \text{откуда}\ \ r = \frac{3a}{\sqrt{15} + \sqrt{3}}\ .$$

Осталось найти долю объёма шара от объёма пирамиды:

$$\frac{V_{шара}}{V_{SABCDEF}} = \frac{4\pi r^3}{3} : \frac{3a^3}{2} = \frac{4\pi\left(3a\right)^3}{3\left(\sqrt{15} + \sqrt{3}\right)^3} \frac{2}{3a^3} = \frac{8\pi}{\sqrt{3}\left(\sqrt{5} + 1\right)^3}\ .$$

Ответ: $\dfrac{8\pi}{\sqrt{3}\left(\sqrt{5} + 1\right)^3}$.

Рекомендуемая литература по математике

1. *Будак А.Б., Щедрин Б.М.* Элементарная математика. Формулы и теоремы, используемые при решении задач. – М.: ООО "МАКС ПРЕСС", 2007, 176 с.

2. *Ткачук В.В.* Математика абитуриенту – М.: МЦНМО, 2017, 944 с.

3. *Сканави М.И.* Сборник задач по математике для поступающих в ВУЗы. – М.: Мир и Образование, 2019, 608 с.

4. *Дорофеев Г.В., Потапов М.К., Розов Н.Х.* Математика: для поступающих в вузы. – М.: ДРОФА, 2007, 582 с.

5. *Золотарева Н.Д., Попов Ю.А., Семендяева Н.Л., Федотов М.В.* Сборник задач по базовому курсу. (ЕГЭ, олимпиады, экзамены в вуз). – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015, 238 с.

6. *Будак Б.А., Золотарева Н.Д., Попов Ю.А., Сазонов В.В., Семендяева Н.Л., Федотов М.В.* Сборник задач по углублённому курсу. (ЕГЭ, олимпиады, экзамены в вуз). Изд. 4-е. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2018, 324 с.

МАТЕРИАЛЫ К ВСТУПИТЕЛЬНЫМ ИСПЫТАНИЯМ ПО ФИЗИКЕ

Экзамен по физике для абитуриентов Казахстанского филиала МГУ проводится в письменной форме. Продолжительность – 4 часа. Каждому абитуриенту предоставляется лист с вариантом экзаменационных заданий и бумага для выполнения работы: записи ответов на вопросы, решений задач с формулировкой ответов.

Особенности физики как предмета определяют отличия в структуре экзаменационного варианта по сравнению, например, с математикой, а также специфику ответов и решений, которые могут дать абитуриенты.

В последние годы вариант по физике состоит из 10 заданий. Первые 4 из них представляют собой вопросы по теории из разных разделов курса физики, изучаемого в средней школе. Следующие 6 заданий являются по существу задачами, также взятыми из различных частей курса физики. Конкретный набор вопросов и задач определяется Центральной приёмной комиссией МГУ утром в день экзамена с помощью лототрона.

Само изучение физики и её освоение в средней школе связано, как правило, с проведением и демонстрацией большого числа физических лабораторных опытов, позволяющих выделить основные закономерности в виде чётко формулируемых физических законов, правил и формул. Такое изложение материала упрощает понимание физических основ и закономерностей и делает предмет наглядным, запоминающимся и удобным для восприятия. В то же время демонстрируется логика физики как научной дисциплины.

При ответе в письменной форме на экзамене воспроизведение и описание всей цепочки рассуждений от опытов к законам и формулам и их детальных выводов считается нецелесообразным. Абитуриенту достаточно дать прямые и точные ответы на вопросы заданий варианта, привести необходимые физические формулы сначала в общем виде без подстановки конкретных числовых значений из условий задания, демонстрируя тем самым свое знание предмета. При этом желательно помимо точных формулировок и формул указать смысл используемых величин или переменных и, при необходимости и по возможности, упомянуть их физическую размерность. Если возможно иллюстрировать ответ с помощью рисунка, диаграммы или графика, или это, по мнению абитуриента, может упростить понимание ответа или улучшить его восприятие, то дополнение ответа иллюстрациями, графиками, рисунками может только приветствоваться. Важно лишь следить за тем, чтобы обозначения на рисунках или графиках соответствовали содержанию ответа, а детали (оси, объекты) были аккуратно подписаны.

Эти же особенности могут быть отнесены и к структуре решений задач. Здесь, как и при решении математических задач, необходимо указывать лишь на названия или происхождение используемых формул, физических законов или правил. Желательно демонстрировать в тексте решений алгебраические преобразования, детали решения уравнений или систем сначала в общем виде без подстановки числовых значений из условий задачи. А затем желательно показать проведение арифметических расчётов и округлений, а также детализировать и согласовывать единицы измерений используемых величин. Каждую задачу необходимо завершить формулировкой короткого и точного ответа на непосредственный вопрос задачи.

Можно заметить, что именно подробная чистовая запись решения и ответа позволяет в случае необходимости или сомнений в правильности решения осуществить проверку с меньшими трудозатратами, потратив на этот процесс и меньшее время.

В виде рекомендаций по предварительной подготовке к вступительному экзамену по физике можно посоветовать абитуриентам заранее, согласовываясь с программой экзамена, имеющейся в этом же разделе, заняться повторением или изучением кратких формулировок и основных формул по каждому теоретическому разделу с использованием одного или нескольких учебников или пособий для абитуриентов по физике. Список рекомендуемой литературы также имеется в этом разделе данного пособия, но, безусловно, такой перечень может быть пополнен и расширен. При этом обычно крайне полезным бывает параллельное самостоятельное конспектирование основных результатов по разделам курса в соответствии с его программой, что значительно облегчает в случае необходимости и последующий поиск автором нужного результата в своем же конспекте.

Подготовка к решению задач совершенно аналогична, но её можно привязывать к конкретным разделам конспекта теоретического курса, что может значительно упростить поиск и использование необходимого материала.

Конечно, следует напомнить, что использование таких конспектов, как и любых других справочных материалов, а также любых технических средств: связи, калькуляторов, фото и видео аппаратуры, на самом экзамене не допускается.

Программа вступительных испытаний по физике

Располагается в регулярно обновляемом разделе «Информация для поступающих, программы вступительных экзаменов» сайта МГУ по адресу *http://www.msu.ru/entrance/program/phys.html.* Программа составлена на основе ныне действующих учебных программ для школ и классов с углублённым изучением физики.

При подготовке к экзамену основное внимание следует уделить выявлению сущности физических законов и явлений, умению истолковывать физический смысл величин и понятий, а также умению применять теоретический материал к решению задач. Необходимо уметь пользоваться при вычислениях системой СИ и знать внесистемные единицы, указанные в программе.

Глубина ответов на пункты программы определяется содержанием опубликованных учебников для школ и классов с углублённым изучением физики, указанных в конце настоящей программы.

I. Механика

I.1. Кинематика

1. Механическое движение. Относительность механического движения. Материальная точка. Система отсчёта. Траектория. Вектор перемещения и его проекции. Путь.
2. Скорость. Сложение скоростей.
3. Ускорение. Сложение ускорений.
4. Прямолинейное равномерное и равнопеременное движение. Зависимости скорости, координат и пути от времени.
5. Криволинейное движение. Движение по окружности. Угловая скорость. Период и частота обращения. Ускорение тела при движении по окружности. Тангенциальное и нормальное ускорения.
6. Свободное падение тел. Ускорение свободно падающего тела. Движение тела, брошенного под углом к горизонту. Дальность и высота полета.
7. Поступательное и вращательное движение твёрдого тела.

I.2. Динамика

1. Взаимодействие тел. Первый закон Ньютона. Понятие об инерциальных и неинерциальных системах отсчёта. Принцип относительности Галилея.
2. Сила. Силы в механике. Сложение сил, действующих на материальную точку.
3. Инертность тел. Масса. Плотность.
4. Второй закон Ньютона. Единицы измерения силы имассы.
5. Третий закон Ньютона.
6. Закон всемирного тяготения. Гравитационная постоянная. Сила тяжести. Зависимость силы тяжести от высоты.
7. Силы упругости. Понятие о деформациях. Закон Гука. Модуль Юнга.
8. Силы трения. Сухое трение: трение покоя и трение скольжения. Коэффициент трения. Вязкое трение.
9. Применение законов Ньютона к поступательному движению тел. Вес тела. Невесомость. Перегрузки.
10. Применение законов Ньютона к движению материальной точки по окружности. Движение искусственных спутников. Первая космическая скорость.

I.3. Законы сохранения в механике

1. Импульс (количество движения) материальной точки. Импульс силы. Связь между приращением импульса материальной точки и импульсом силы. Импульс системы материальных точек. Центр масс. Закон сохранения импульса. Реактивное движение.
2. Механическая работа. Мощность. Энергия. Единицы измерения работы и мощности.
3. Кинетическая энергия материальной точки и системы материальных точек. Связь между приращением кинетической энергии тела и работой приложенных к телу сил.
4. Потенциальная энергия. Потенциальная энергия тел вблизи поверхности Земли. Потенциальная энергия упруго деформированного тела.
5. Закон сохранения механической энергии.

I.4. Статика твёрдого тела

1. Сложение сил, приложенных к твёрдому телу. Момент силы относительно оси вращения. Правило моментов.
2. Условия равновесия тела. Центр тяжести тела. Устойчивое, неустойчивое и безразличное равновесия тел.

I.5. Механика жидкостей и газов

1. Давление. Единицы измерения давления: паскаль, мм рт. ст.
2. Закон Паскаля. Гидравлический пресс. Давление жидкости на дно и стенки сосуда. Сообщающиеся сосуды.
3. Атмосферное давление. Опыт Торричелли. Изменение атмосферного давления с высотой.
4. Закон Архимеда. Плавание тел.
5. Движение жидкостей. Уравнение Бернулли.

I.6. Механические колебания и волны. Звук

1. Понятие о колебательном движении. Период и частота колебаний.
2. Гармонические колебания. Смещение, амплитуда и фаза при гармонических колебаниях.
3. Свободные колебания. Колебания груза на пружине. Математический маятник. Периоды их колебаний. Превращения энергии при гармонических колебаниях. Затухающие колебания.
4. Вынужденные колебания. Резонанс.
5. Понятие о волновых процессах. Поперечные и продольные волны. Длина волны. Скорость распространения волн. Фронт волны. Уравнение бегущей волны. Стоячие волны.
6. Интерференция волн. Принцип Гюйгенса. Дифракция волн.
7. Звуковые волны. Скорость звука. Громкость и высота звука.

II. Молекулярная физика и термодинамика

II.1. Основы молекулярно-кинетической теории

1. Основные положения молекулярно-кинетической теории и их опытное обоснование. Броуновское движение. Масса и размер молекул. Моль вещества. Постоянная Авогадро. Характер движения молекул в газах, жидкостях и твёрдых телах.
2. Тепловое равновесие. Температура и её физический смысл. Шкала температур Цельсия.
3. Идеальный газ. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа. Средняя кинетическая энергия молекул и температура. Постоянная Больцмана. Абсолютная температурная шкала.
4. Уравнение Клапейрона-Менделеева (уравнение состояния идеального газа). Универсальная газовая постоянная. Изотермический, изохорный и изобарный процессы.

II.2. Элементы термодинамики

1. Термодинамическая система. Внутренняя энергия системы. Количество теплоты и работа как меры изменения внутренней энергии. Теплоёмкость тела. Понятие об адиабатическом процессе. Первый закон термодинамики. Применение первого закона термодинамики к изотермическому, изохорному и изобарному процессам. Расчёт работы газа с помощью pV-диаграмм. Теплоёмкость одноатомного идеального газа при изохорном и изобарном процессах.
2. Необратимость процессов в природе. Второй закон термодинамики. Физические основы работы тепловых двигателей. КПД теплового двигателя и его максимальное значение.

II.3. Изменение агрегатного состояния вещества

1. Парообразование. Испарение, кипение. Удельная теплота парообразования. Насыщенный пар. Зависимость давления и плотности насыщенного пара от температуры. Зависимость температуры кипения от давления. Критическая температура.
2. Влажность. Относительная влажность.
3. Кристаллическое и аморфное состояние вещества. Удельная теплота плавления.
4. Уравнение теплового баланса.

II.4. Поверхностное натяжение в жидкостях

1. Сила поверхностного натяжения. Явления смачивания и несмачивания. Давление под искривленной поверхностью жидкости. Капиллярные явления.

II.5. Тепловое расширение твёрдых тел и жидкостей

1. Тепловое линейное расширение. Тепловое объёмное расширение. Особенности теплового расширения воды.

III. Электродинамика

III.1. Электростатика

1. Электрические заряды. Элементарный электрический заряд. Закон сохранения электрического заряда. Взаимодействие электрически заряженных тел. Электроскоп. Точечный заряд. Закон Кулона.
2. Электрическое поле. Напряжённость электрического поля. Линии напряжённости электрического поля (силовые линии). Однородное электрическое поле. Напряжённость электростатического поля точечного заряда. Принцип суперпозиции полей. Теорема Гаусса.

Электростатическое поле равномерно заряженных плоскости, сферы и шара.

3. Работа сил электростатического поля. Потенциал и разность потенциалов. Связь разности потенциалов с напряжённостью электростатического поля. Потенциал поля точечного заряда. Эквипотенциальные поверхности.
4. Проводники и диэлектрики в электростатическом поле. Диэлектрическая проницаемость вещества. Электроёмкость. Конденсаторы. Поле плоского конденсатора. Электроёмкость плоского конденсатора. Последовательное и параллельное соединение конденсаторов. Энергия заряженного конденсатора.
5. Энергия электрического поля.

III.2. Постоянный ток

1. Электрический ток. Сила тока. Условия существования постоянного тока в цепи. Электродвижущая сила (ЭДС). Напряжение. Измерение силы тока и напряжения.
2. Закон Ома для участка цепи. Омическое сопротивление проводника. Удельное сопротивление. Зависимость удельного сопротивления от температуры. Сверхпроводимость. Последовательное и параллельное соединение проводников. Измерение сопротивления.
3. Закон Ома для полной цепи. Источники тока, их соединение. Правила Кирхгофа.
4. Работа и мощность тока. Закон Джоуля-Ленца.
5. Электрический ток в металлах.
6. Электрический ток в электролитах. Законы электролиза.
7. Электрический ток в вакууме. Термоэлектронная эмиссия. Электронная лампа-диод. Электронно-лучевая трубка.
8. Полупроводники. Собственная и примесная проводимость полупроводников. Зависимость проводимости полупроводников от температуры. *p*-*n*-переход и его свойства. Полупроводниковый диод. Транзистор. Термистор и фоторезистор.
9. Электрический ток в газах. Самостоятельный и несамостоятельный разряды. Понятие о плазме.

III.3. Магнетизм

1. Магнитное поле. Действие магнитного поля на рамку с током. Индукция магнитного поля (магнитная индукция). Линии магнитной

индукции. Картины линий индукции магнитного поля прямого тока и соленоида. Понятие о магнитном поле Земли.

2. Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле. Закон Ампера.
3. Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца.
4. Магнитные свойства вещества. Гипотеза Ампера. Ферромагнетики.

III.4. Электромагнитная индукция

1. Магнитный поток. Опыты Фарадея. Явление электромагнитной индукции. Вихревое электрическое поле. Закон электромагнитной индукции. Правило Ленца.
2. Самоиндукция. Индуктивность. ЭДС самоиндукции.
3. Энергия магнитного поля.

III.5. Электромагнитные колебания и волны

1. Переменный электрический ток. Амплитудное и действующее (эффективное) значение периодически изменяющегося напряжения и тока.
2. Получение переменного тока с помощью индукционных генераторов. Трансформатор. Передача электрической энергии.
3. Колебательный контур. Свободные электромагнитные колебания в контуре. Превращения энергии в колебательном контуре. Уравнение, описывающее процессы в колебательном контуре, и его решение. Формула Томсона для периода колебаний. Затухающие электромагнитные колебания.
4. Вынужденные колебания в электрических цепях. Активное, ёмкостное и индуктивное сопротивления в цепи гармонического тока. Резонанс в электрических цепях.
5. Открытый колебательный контур. Опыты Герца. Электромагнитные волны. Их свойства. Шкала электромагнитных волн. Излучение и приём электромагнитных волн. Принципы радиосвязи.

IV. Оптика

IV.1. Геометрическая оптика

1. Развитие взглядов на природу света. Закон прямолинейного распространения света. Понятие луча.
2. Интенсивность (плотность потока) излучения. Световой поток. Освещённость.

3. Законы отражения света. Плоское зеркало. Сферическое зеркало. Построение изображений в плоском и сферическом зеркалах.
4. Законы преломления света. Абсолютный и относительный показатели преломления. Ход лучей в призме. Явление полного (внутреннего) отражения.
5. Тонкие линзы. Фокусное расстояние и оптическая сила линзы.
6. Построение изображения в собирающих и рассеивающих линзах. Формула линзы. Увеличение, даваемое линзами.
7. Оптические приборы: лупа, фотоаппарат, проекционный аппарат, микроскоп. Ход лучей в этих приборах. Глаз.

IV.2. Элементы физической оптики

1. Волновые свойства света. Поляризация света. Электромагнитная природа света.
2. Скорость света в однородной среде. Дисперсия света. Спектроскоп. Инфракрасное и ультрафиолетовое излучения.
3. Интерференция света. Когерентные источники. Условия образования максимумов и минимумов в интерференционной картине.
4. Дифракция света. Опыт Юнга. Принцип Гюйгенса-Френеля. Дифракционная решетка.
5. Корпускулярные свойства света. Постоянная Планка. Фотоэффект. Законы фотоэффекта. Фотон. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта.
6. Давление света. Опыты Лебедева по измерению давления света.
7. Постулаты теории относительности (постулаты Эйнштейна). Связь между массой и энергией.

V. Атом и атомное ядро

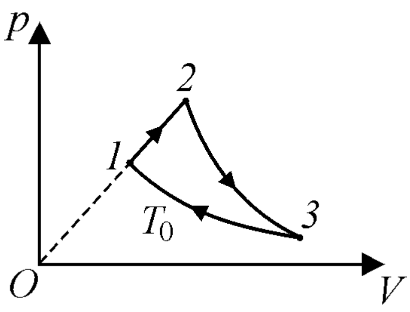
1. Опыты Резерфорда по рассеянию α-частиц. Планетарная модель атома. Квантовые постулаты Бора. Испускание и поглощение энергии атомом. Непрерывный и линейчатый спектры. Спектральный анализ.
2. Экспериментальные методы регистрации заряженных частиц: камера Вильсона, счётчик Гейгера, пузырьковая камера, фотоэмульсионный метод.
3. Состав ядра атома. Изотопы. Энергия связи атомных ядер. Понятие о ядерных реакциях. Радиоактивность. Виды радиоактивных излучений и их свойства. Цепные ядерные реакции. Термоядерная реакция.

4. Биологическое действие радиоактивных излучений. Защита от радиации.

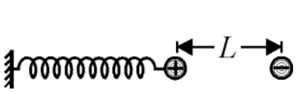
Задания вступительных испытаний по физике

Вариант Ф.2018-1

1. Дайте определение момента силы относительно оси. Сформулируйте условия равновесия твёрдого тела.
2. Дайте определение коэффициента полезного действия (КПД) теплового двигателя. Укажите его максимальное значение.
3. Дайте определение магнитного потока. Сформулируйте закон электромагнитной индукции.
4. Какие источники света называются когерентными? Сформулируйте условия образования максимумов и минимумов в интерференционной картине.
5. Задача. Две звезды одинаковой массой M движутся по окружности радиуса R, располагаясь на противоположных концах диаметра окружности. Пренебрегая влиянием других небесных тел, определите период T обращения звезд. Гравитационная постоянная G.
6. Задача. С одним молем идеального одноатомного газа проводят цикл, показанный на рисунке. На участке $1-2$ объём газа увеличивается в $m=2$ раза. Процесс $2-3$ – адиабатическое расширение, процесс $3-1$ – изотермическое сжатие при температуре $T_0 = 300$ К. Найдите работу A газа на участке $2-3$. Универсальную газовую постоянную примите равной $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К).



7. Задача. Маленький шарик, несущий заряд $+q$, закреплён на пружине жесткостью k. На расстоянии L от этого шарика удерживают другой такой же шарик с зарядом, равным $-q$. Какую работу A нужно совершить, чтобы, медленно отодвигая второй заряд от первого, увеличить расстояние между ними в 2 раза? Действие силы тяжести не учитывайте. Электрическая постоянная ε_0.

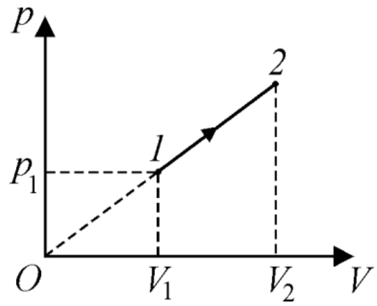


8. Задача. С помощью тонкой собирающей линзы на экране, установленном перпендикулярно оптической оси, получают изображение светящегося диска. Диаметр изображения в $n = 8$ раз меньше, чем сам диск. Когда линзу отодвинули от экрана на $\Delta l = 28$ см, то на экране снова получилось резкое изображение диска. Определите фокусное расстояние F линзы.
9. Задача. Покоящийся в вакууме возбуждённый атом водорода с энергией $E_2 = -3{,}4$ эВ поглощает фотон. В результате этого атом ионизируется, и электрон, вылетевший из атома, движется вдали от ядра со скоростью $\upsilon = 800$ км/с. Определите частоту поглощённого фотона. Кинетической энергией образовавшегося иона можно пренебречь. Пусть 1 эВ = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж, масса электрона $m = 9 \cdot 10^{-31}$ кг, постоянную Планка примите равной $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.
10. Задача. Рассчитайте, какая энергия выделяется при ядерной реакции ${}^{7}_{3}\mathrm{Li} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{8}_{4}\mathrm{Be} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}$. Массы ядер равны, соответственно: лития ${}^{7}_{3}\mathrm{Li}$ – 7,01436 а.е.м.; дейтерия ${}^{2}_{1}\mathrm{H}$ – 2,01355 а.е.м.; бериллия ${}^{8}_{4}\mathrm{Be}$ – 8,00311 а.е.м; масса протона – 1,00728 а.е.м.; масса нейтрона – 1,00866 а.е.м; энергетический эквивалент 1 а.е.м. равен 931,5 МэВ. Ответ приведите в электрон-вольтах (1эВ = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж).

Вариант Ф.2018-2

1. Дайте определение кинетической энергии тела. Запишите связь между приращением кинетической энергии тела и работой приложенных к телу сил.
2. Дайте определение теплоёмкости тела. Запишите формулы для теплоёмкости одноатомного идеального газа при изохорном и изобарном процессах.
3. Запишите формулы для расчёта сопротивления последовательно и параллельно соединённых проводников.
4. Дайте определение фокусного расстояния и оптической силы линзы. Запишите формулу тонкой линзы.
5. Задача. Маленький груз, подвешенный к потолку на невесомой, нерастяжимой нити, вращается в горизонтальной плоскости, отстоящей от потолка на расстояние $h = 1{,}1$ м. Найдите частоту ν вращения груза. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2.

6. Задача. Найдите количество теплоты ΔQ, сообщённое идеальному одноатомному газу, при переводе его из состояния *1* в состояние *2*, как показано на рисунке. При расчётах ответа параметры газа примите равными $p_1 = 100$ кПа, $V_1 = 2$ л, $V_2 = 4$ л.



7. Задача. Электрон влетает в область пространства с однородным магнитным полем с индукцией $B = 2{\cdot}10^{-3}$ Тл перпендикулярно линиям поля. Определите путь S, пройденный электроном за время $t = 1$ мкс, если он начал двигаться по окружности радиуса $R = 1$ см. Масса электрона $m = 9{\cdot}10^{-31}$ кг, модуль его заряда равен $q = 1{,}6{\cdot}10^{-19}$ Кл.
8. Задача. Два луча света падают из воздуха в жидкость. Углы преломления лучей равны $\beta_1 = 30°$ и $\beta_2 = 45°$. Найдите показатель преломления жидкости n, если известно, что падающие лучи перпендикулярны друг другу и лежат в одной плоскости, перпендикулярной поверхности жидкости.
9. Задача. Согласно теории Бора энергию электрона на n-ом энергетическом уровне атома водорода можно представить в виде $E_n = -\frac{13{,}6}{n^2}$ эВ (1 эВ = $1{,}6\cdot 10^{-19}$ Дж). Покоящийся атом водорода испустил световой квант при переходе из возбуждённого состояния ($n = 2$) в основное состояние ($n = 1$). Какую скорость v приобрёл атом? Масса протона $m_p = 1{,}673\cdot 10^{-27}$ кг, скорость света $c = 3\cdot 10^8$ м/с.
10. Задача. Определите неизвестный продукт X ядерной реакции: ${}^{44}_{20}\mathrm{Ca} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{41}_{19}\mathrm{K} + \mathrm{X}$ и рассчитайте энергию этой реакции. Массы изотопов и частиц пусть равны: $M_{{}^{44}_{20}\mathrm{Ca}}$ = 43,95549 а.е.м., $m_{{}^{1}_{1}\mathrm{H}}$ = 1,00783 а.е.м., $M_{{}^{41}_{19}\mathrm{K}}$ = 40,96184 а.е.м., $M_{{}^{4}_{2}\mathrm{He}}$ = 4,00260 а.е.м. Ответ задачи приведите в электрон-вольтах (1 а.е.м.$\approx 1{,}66\cdot 10^{-27}$ кг, 1 эВ $= 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Дж).

Решения заданий вступительных испытаний по физике

Вариант Ф.2018-1

1. Дайте определение момента силы относительно оси. Сформулируйте условия равновесия твердого тела.

   Решение. Моментом силы относительно оси называется проекция силы на эту ось. Условием равновесия твёрдого тела является равенство нулю суммы моментов всех сил, действующих на тело, на любую ось.

2. Дайте определение коэффициента полезного действия (КПД) теплового двигателя. Укажите его максимальное значение.

   Решение. Тепловым двигателем называют устройство, которое совершает работу благодаря использованию внутренней энергии. Любая тепловая машина, превращающая тепловую энергию в механическую, использует тепловое расширение веществ при повышении температуры. В твердотельных двигателях возможно не только изменение объёма вещества, но и формы тела. Действие такого двигателя подчинено законам термодинамики. Таким образом, тепловой двигатель совершает работу A, то есть выдаёт механическую энергию, за счёт уменьшения внутренней энергии некоторого вещества от исходного (начального) значения Q_1 до завершающего (финального) значения Q_2. В соответствии с законом сохранения энергии при этом $A \leq Q_1-Q_2$. Коэффициентом полезного действия (КПД) теплового двигателя называется величина $\eta=A/Q_1$. В силу упомянутого, связанного с законом сохранения энергии, неравенства $A \leq Q_1 - Q_2$, значение КПД η теплового двигателя не может оказаться больше единицы, так как справедлива оценка $\eta=A/Q_1\leq(Q_1-Q_2)/Q_1$, а в силу неотрицательности финальной внутренней энергии Q_2 используемого в двигателе вещества и положительности начальной его внутренней энергии $Q_1>Q_2$ значение числителя в отношении, определяющем КПД, всегда небольше знаменателя. Таким образом, КПД теплового двигателя не может превышать 1 (единицу).

3. Дайте определение магнитного потока. Сформулируйте закон электромагнитной индукции.

   Решение. Проходящий через площадь плоской ограниченной фигуры (поверхности) S магнитный поток Φ – это физическая величина, равная произведению модуля вектора магнитной индукции B на площадь S и косинус угла α между векторами B и единичной нормалью n к поверхности S. При этом магнитная индукция векторная величина, являющаяся силовой характеристикой магнитного поля (его действия на электрически заряженные частицы) в данной точке пространства. Магнитная индукция так же характеризует магнитное поле, как, например, напряжённость электрического поля характеризует действие поля электрического. Магнитная индукция B определяет, с какой силой F магнитное поле действует на заряд q, движущийся со скоростью v в магнитном поле, то есть так, чтобы $\vec{F} = q[\vec{v} \times \vec{B}]$, где квадратные скобки обозначают векторное произведение вектора скорости v заряда q, движущегося в магнитном поле, на вектор индукции B магнитного поля. При этом численно значение модуля силы F равно произведению $|F|=q\cdot|v|\cdot|B|\cdot\sin\alpha$, а направление вектора F перпендикулярно векторам v и B так, что выполняется правило буравчика. Закон электромагнитной индукции определяет возникновение электрического тока в замкнутом электропроводящем контуре при изменении магнитного потока Φ через площадь S этого контура так, что $\varepsilon = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, где ε – электродвижущая сила (ЭДС) в контуре, а отношение изменения $\Delta\Phi$ магнитного потока за время Δt к величине Δt есть скорость изменения магнитного потока Φ через площадь S контура.

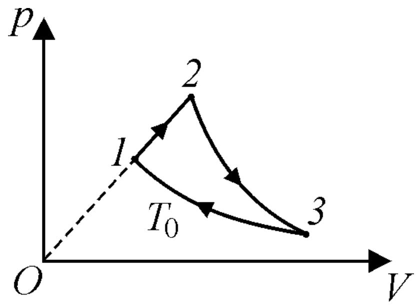
4. Какие источники света называются когерентными? Сформулируйте условия образования максимумов и минимумов в интерференционной картине.

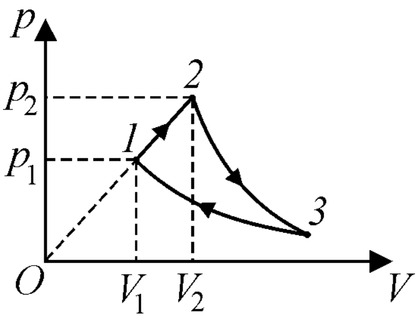
   Решение. Когерентные источники света – это источники, которые имеют постоянную во времени разность фаз, и, следовательно, согласованное протекание некоторых колебательных или волновых процессов. Пусть, например, две волны из двух разных источников света одинаковой частоты, накладываясь друг на друга в некоторой точке пространства, возбуждают в этой точке пространства колебания одинакового направления: $x_1=A\cdot\cos(\omega t+\varphi_1)$ и $x_2=B\cdot\cos(\omega t+\varphi_2)$, где под x понимается напряженность электрического E и магнитного H полей волны. Тогда амплитуда колебаний таких когерентных источников в рассматриваемой точке складывается и приобретает значение C такое, что $C^2 = A^2+B^2+2AB\cdot\cos(\varphi_1-\varphi_2)$, причём значение C не зависит от времени. В этом и заключается эффект когерентности источников света. В случае равенства косинуса разности φ_1-φ_2 единице в точке достигается максимум освещённости, а в случае равенства косинуса (- 1) и выполнения одновременно равенства A=B амплитуд двух источников света, в точке будет достигаться минимум освещённости от рассматриваемых двух источников, так как при таких условиях величина суммарной амплитуды C будет равняться нулю.

5. Задача. Две звезды одинаковой массой M движутся по окружности радиуса R, располагаясь на противоположных концах диаметра окружности. Пренебрегая влиянием других небесных тел, определите период T обращения звезд. Гравитационная постоянная G.
Решение. Каждая из звезд движется под действием гравитационного притяжения к другой звезде. Пусть v – скорость движения звезды по орбите. По второму закону Ньютона для каждой из звезд имеем: $\frac{Mv^2}{R} = G\frac{M^2}{4R^2}$. Учитывая, что $T = \frac{2\pi R}{v}$, получаем, что $T = 4\pi R\sqrt{\frac{R}{GM}}$.

Ответ: $T = 4\pi R\sqrt{\frac{R}{GM}}$.

6. Задача. С одним молем идеального одноатомного газа проводят цикл, показанный на рисунке. На участке $1-2$ объём газа увеличивается в $m=2$ раза. Процесс $2-3$ –адиабатическое расширение, процесс $3-1$– изотермическое сжатие при температуре $T_0 = 300$ К. Найдите работу A газа на участке $2-3$. Универсальную газовую постоянную примите равной $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К).





Решение. Дополненная pV-диаграмма рассматриваемого в задаче процесса изображена на рисунке. Для вычисления работы, совершённой газом при адиабатическом расширении на участке $2-3$, воспользуемся соотношением, определяющим закон сохранения энергии: $A_{23} = -\Delta U_{23} = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_0)$,

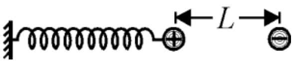
где U – внутренняя энергия газа, ν – количество молей газа. Обозначив через p_1, V_1 и p_2, V_2 давления и объемы газа в точках 1 и 2 соответственно, запишем уравнения состояния газа в этих точках:

$p_1V_1 = \nu RT_0$, $p_2V_2 = \nu RT_2$. Поскольку $p_2 = mp_1$, $V_2 = mV_1$, из этих уравнений следует, что $T_2 = m^2T_0$.

Ответ: $A = \dfrac{3}{2}R(m^2-1)T_0 = 11{,}2$ кДж.

7. Задача. Маленький шарик, несущий заряд $+q$, закреплён на пружине жесткостью k. На расстоянии L от этого шарика удерживают другой такой же шарик с зарядом, равным $-q$. Какую работу A нужно совершить, чтобы, медленно отодвигая второй заряд от первого, увеличить расстояние между ними в 2 раза? Действие силы тяжести не учитывайте. Электрическая постоянная ε_0.

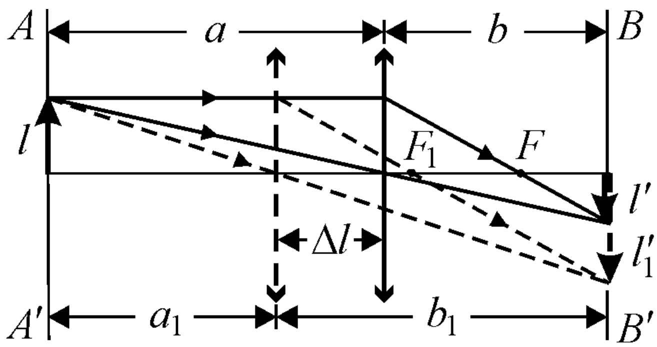
   Решение. Искомая работа равна изменению потенциальной энергии системы: $A = E_{\Pi 2} - E_{\Pi 1}$, где $E_{\Pi 1} = \dfrac{kx_1^2}{2} - \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{q^2}{L}$, $E_{\Pi 2} = \dfrac{kx_2^2}{2} - \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{q^2}{2L}$. При



этом начальное x_1 и конечное x_2 удлинения пружины определяются условиями равновесия заряда q: $kx_1 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{q^2}{L^2}$, $kx_2 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{q^2}{4L^2}$. Объединяя записанные выражения в алгебраическую систему уравнений, можно получить искомую величину $A = \dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 L}\left(1 - \dfrac{15q^2}{64\pi\varepsilon_0 kL^3}\right)$.

Ответ: $A = \dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 L}\left(1 - \dfrac{15q^2}{64\pi\varepsilon_0 kL^3}\right)$.

8. Задача. С помощью тонкой собирающей линзы на экране, установленном перпендикулярно оптической оси, получают изображение светящегося диска. Диаметр изображения в $n = 8$ раз меньше, чем сам диск. Когда линзу отодвинули от экрана на $\Delta l = 28$ см, то на экране снова получилось резкое изображение диска. Определите фокусное расстояние F линзы.



Решение. Построение изображения диска проиллюстрировано на рисунке, где начальное и конечное положения линзы изображены сплошной и штриховой линиями, а через AA' и BB' обозначены плоскости объекта и изображения, соответственно. Из свойств преломляющих лучи плоских линз, представленных на рисунке на расстоянии Δl друг от друга, следует, что отношение размера изображения l' (или l_1') к размеру объекта l (увеличение M, даваемое линзой), может принимать два значения: $M = b/a$ и $M_1 = b_1/a_1$. В рассматриваемом случае при первоначальном положении линзы $M = 1/n$, то есть $M < 1$ (изображение уменьшенное). При отодвигании линзы от экрана на нём формируется увеличенное изображение предмета. По условию задачи $a = nb$, $a_1 = a - \Delta l = b$. Отсюда $b = \dfrac{\Delta l}{n-1}$, $a = \dfrac{n\Delta l}{n-1}$. Из формулы тонкой линзы следует, что $F = \dfrac{ab}{a+b}$. Подставляя сюда найденные a и b, можно найти искомое фокусное расстояние $F = \dfrac{n\Delta l}{n^2-1} \approx 3{,}56$ см.

Ответ: $F = \dfrac{n\Delta l}{n^2-1} \approx 3{,}56$ см.

9. Задача. Покоящийся в вакууме возбуждённый атом водорода с энергией $E_2 = -\,3{,}4$ эВ поглощает фотон. В результате этого атом ионизируется, и электрон, вылетевший из атома, движется вдали от ядра со скоростью $\upsilon = 800$ км/с. Определите частоту поглощённого фотона. Кинетической энергией образовавшегося иона можно пренебречь. Пусть 1 эВ = $1{,}6\cdot 10^{-19}$ Дж, масса электрона $m = 9\cdot 10^{-31}$ кг, постоянную Планка примите равной $h = 6{,}6\cdot 10^{-34}$ Дж·с.

   Решение. Энергия поглощённого фотона расходуется на ионизацию атома водорода и кинетическую энергию вылетевшего электрона. При этом: $E_ф = h\nu = \dfrac{m\upsilon^2}{2} + |E_2|$. Используя второе равенство в последней цепочке равенств как уравнение, из него сразу можно получить искомую величину

$$\nu = \frac{m\upsilon^2 + 2|E_2|}{2h} = \frac{9\cdot 10^{-31}\cdot 64\cdot 10^{10} + 2\cdot 3{,}4\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}}{2\cdot 6{,}6\cdot 10^{-34}} \approx 1{,}26\cdot 10^{15}\,\text{Гц}.$$

Ответ: $\nu = \dfrac{m\upsilon^2 + 2|E_2|}{2h} \approx 1{,}26\cdot 10^{15}$ Гц.

10. Задача. Рассчитайте, какая энергия выделяется при ядерной реакции ${}^7_3\mathrm{Li} + {}^2_1\mathrm{H} \to {}^8_4\mathrm{Be} + {}^1_0\mathrm{n}$. Массы ядер равны, соответственно: лития ${}^7_3\mathrm{Li}$ –

7,01436 а.е.м.; дейтерия $_1^2\text{H}$ – 2,01355 а.е.м.; бериллия $_4^8\text{Be}$ – 8,00311 а.е.м; масса протона – 1,00728 а.е.м.; масса нейтрона – 1,00866 а.е.м; энергетический эквивалент 1 а.е.м. равен 931,5 МэВ. Ответ приведите в электрон-вольтах (1эВ = $1{,}6\cdot10^{-19}$ Дж).

Решение. Энергию, выделяющуюся или поглощающуюся при ядерной реакции, можно найти по разности Δm масс частиц, вступающих в реакцию, и масс частиц, являющихся продуктами этой реакции. Если сумма масс исходных ядер и поглощаемых частиц больше суммы масс ядер-продуктов и испускаемых частиц (дефект массы $\Delta m > 0$), то энергия в реакции выделяется. Если $\Delta m < 0$, то энергия поглощается. Величина выделившейся или поглощённой энергии равна $\Delta E = \Delta m c^2$, где c – скорость света. Для упрощения промежуточных вычислений можно записывать закон сохранения энергии в атомных единицах массы. Обозначим через m_{Li} массу ядра лития, через m_{D} – массу ядра дейтерия, через m_{Be} – массу ядра бериллия, через m_{n} – массу нейтрона. Тогда баланс масс принимает вид $m_{\text{Li}} + m_{\text{D}} = m_{\text{Be}} + m_{\text{n}} + \Delta m$. Отсюда дефект массы $\Delta m = m_{\text{Li}} + m_{\text{D}} - m_{\text{Be}} - m_{\text{n}} = 7{,}01436 + 2{,}01355 - 8{,}00311 - 1{,}00866 = 0{,}01614$ а.е.м.

Выделившаяся в описанной реакции энергия, таким образом, будет равна произведению дефекта массы на энергетический эквивалент одной атомной единицы массы (1 а.е.м.): $\Delta E = 0{,}01614\cdot 931{,}5 \approx 15$ МэВ.

Ответ: $\Delta E \approx 15$ МэВ.

Вариант Ф.2018-2

1. Дайте определение кинетической энергии тела. Запишите связь между приращением кинетической энергии тела и работой приложенных к телу сил.

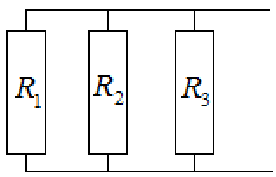
Решение. Кинетическая энергия тела – это скалярная величина, характеризующая возможность двигающегося тела совершить работу. Для скоростей, значительно меньших скорости света, кинетическая энергия тела численно пропорциональна произведению полумассы тела на квадрат его скорости: $E_K = \dfrac{mv^2}{2}$, где m – масса тела, v – его скорость. Так как кинетическая энергия тела обуславливается его движением, то она также является разностью между полной энергией тела и его энергией покоя. Работа всех сил, действующих на тело при его перемещении из положения *1* в положение *2*, идёт на изменение кинетической энергии тела $A_{21} = E_{K,2} - E_{K,1}$.

2. Дайте определение теплоёмкости тела. Запишите формулы для теплоёмкости одноатомного идеального газа при изохорном и изобарном процессах.

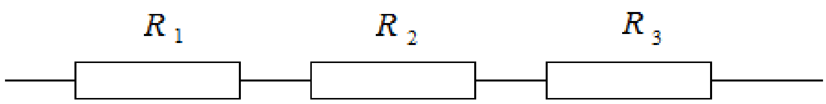
   Решение. Теплоёмкость тела – это физическая величина, определяемая отношением количества теплоты, поглощённой телом при нагревании, к изменению его температуры $C_\text{Т} = \dfrac{Q}{T_2 - T_1} = \dfrac{Q}{\Delta T}$. При исследовании одноатомного идеального газа, представляющего собой состоящую из атомов одного типа математическую модель газа, потенциальной энергией взаимодействия частиц в котором можно пренебречь по сравнению с их кинетической энергией, соударения частиц между собой и со стенками сосуда можно считать абсолютно упругими, а время соударений – пренебрежимо малыми по сравнению со средним временем между столкновениями, принято использовать уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона-Менделеева) $pV = \dfrac{m}{M} RT$. Изменение состояния идеального газа достаточно хорошо прослеживается в изохорном процессе (при неизменности объёма $V = \text{const}$, занимаемого газом). В этом случае $\dfrac{p}{T} = \text{const}$, и теплота, поглощённая или отданная телом пропорциональна изменению температуры тела: $\Delta Q = \nu \cdot C_\text{V} \cdot \Delta T$. И тогда для идеального одноатомного газа $C_\text{V} = \dfrac{3}{2} R$, где значение 3 в числителе дроби при универсальной газовой постоянной R указывает число степеней свободы, имеющихся для движения у каждой частицы атома одноатомного газа. Другой вариант представления теплоёмкости идеального газа $C_\text{V} = \dfrac{1}{\gamma - 1} R$, где γ – это показатель адиабаты. Такого же типа упрощение проявляется при изобарном процессе (с постоянным давлением $p = \text{const}$). В этом случае $\dfrac{V}{T} = \text{const}$, и теплоёмкость одного моля одноатомного идеального газа имеет вид $C_p = C_V + R = \frac{5}{2}R$.

3. Запишите формулы для расчета сопротивления последовательно и параллельно соединенных проводников.

Решение. Суммарное сопротивление электрической цепи, содержащей последовательно и параллельно соединённые сопротивления, рассчитывается по двум следующим формулам.



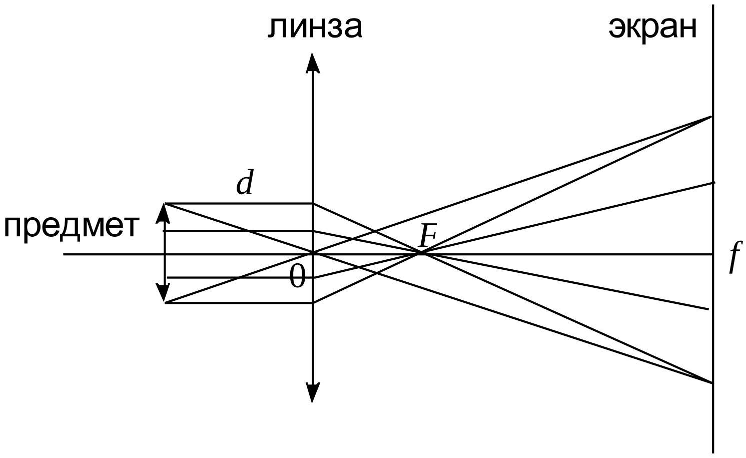
параллельное соединение сопротивлений



последовательное соединение проводников

Суммарное сопротивление при последовательном соединении рассчитывается по формуле $R_{послед.} = R_1 + R_2 + R_3$, и аналогично строится уравнение $\frac{1}{R_{параллел.}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$ для суммарного сопротивления $R_{параллел.}$ при параллельном соединении так, что общее суммарное сопротивление в этом случае можно найти разрешением последнего уравнения относительно $R_{параллел.}$ в виде $R_{параллел.} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$.

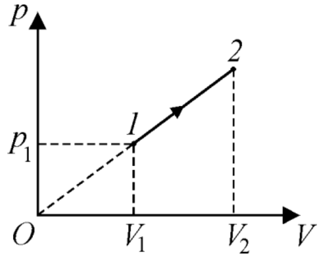
4. Дайте определение фокусного расстояния и оптической силы линзы. Запишите формулу тонкой линзы.



Решение. Фокусное расстояние – это расстояние (F) от оптического центра линзы до её главного фокуса. Оптическая сила линзы – это величина (D), характеризующая преломляющую способность линзы или системы оптических линз. Формула тонкой линзы имеет вид $\frac{1}{F}=\frac{1}{d}+\frac{1}{f}$, связывая в одну зависимость расстояние d от центра линзы (на рисунке – это 0) с расстоянием f до экрана, на котором изображение предмета является резким (находится в «фокусе»). Оптическая сила линзы D определяется формулой $D=\frac{n_o}{F}$, где n_o – это показатель преломления среды, окружающей линзу и тела.

5. Задача.Маленький груз, подвешенный к потолку на невесомой, нерастяжимой нити, вращается в горизонтальной плоскости, отстоящей от потолка на расстояние h = 1,1 м. Найдите частоту ν вращения груза. Ускорение свободного падения примите равным g = 10 м/с^2.
Решение. Уравнения движения груза в проекции на оси системы координат имеют следующий вид: $ma=T\sin\alpha$, $0=T\cos\alpha-mg$. Ускорение груза направлено вдоль оси X к центру окружности и равно $a=4\pi^2\nu^2 r$, где $r=h\text{tg}\alpha$. Тогда $T\sin\alpha=\frac{mg\sin\alpha}{\cos\alpha}=4m\pi^2\nu^2 r=4m\pi^2\nu^2 h\text{tg}\alpha$.
Следовательно, искомая частота вращения груза равна: $\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{h}}\approx 0{,}48\,\text{c}^{-1}$. *Ответ*: $\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{h}}\approx 0{,}48$ с$^{-1}$.

6. Задача. Найдите количество теплоты ΔQ, сообщённое идеальному одноатомному газу при переводе его из состояния *1*в состояние *2* как показано на рисунке. При расчётах параметры газа примите равными $p_1=100$ кПа, $V_1=2$ л, $V_2=4$ л.



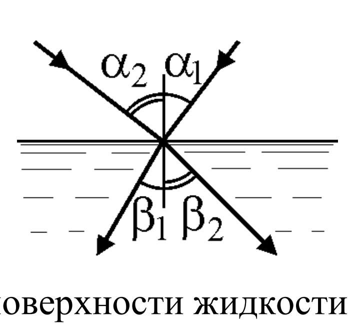
Решение. Изменение внутренней энергии в рассматриваемом процессе имеет вид $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}\left(p_2V_2 - p_1V_1\right)$. Учитывая, что продолжение прямой, изображающей график процесса, проходит через начало координат (давление в этом процессе пропорционально объёму), можно получить $p_2 = p_1\frac{V_2}{V_1}$. Тогда $\Delta U = \frac{3}{2}p_1V_1\left(\frac{V_2^2}{V_1^2} - 1\right)$. Работа газа в этом процессе численно равна площади трапеции: $A = \frac{1}{2}\left(p_2 + p_1\right)\left(V_2 - V_1\right) = \frac{1}{2}p_1V_1\left(\frac{V_2^2}{V_1^2} - 1\right)$. Количество теплоты, полученное газом, $\Delta Q = \Delta U + A$. Следовательно, подставляя уже полученные значения слагаемых в последнее равенство, можно найти искомое значение $\Delta Q = \Delta U + A = 2p_1V_1\left(\frac{V_2^2}{V_1^2} - 1\right) = \frac{2p_1}{V_1}(V_2^2 - V_1^2)$.

Ответ: $\Delta Q = \frac{2p_1}{V_1}(V_2^2 - V_1^2) = 1{,}2$ кДж.

7. Задача. Электрон влетает в область пространства с однородным магнитным полем с индукцией $B = 2\cdot10^{-3}$ Тл перпендикулярно линиям поля. Определите путь S, пройденный электроном за время $t = 1$ мкс, если он начал двигаться по окружности радиуса $R = 1$ см. Масса электрона $m = 9\cdot10^{-31}$ кг, модуль его заряда равен $q = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

Решение. В однородном магнитном поле на электрон, движущийся перпендикулярно линиям этого поля, будет действовать сила Лоренца $F_{\text{Л}} = q\upsilon B$, где q – заряд электрона, υ – его скорость. Уравнение движения электрона, который под действием силы Лоренца будет двигаться по окружности радиуса R, имеет следующий вид: $ma = m\frac{\upsilon^2}{R} = q\upsilon B$. Отсюда $\upsilon = \frac{qBR}{m}$, а значит путь, пройденный электроном за время t равен $S = \frac{qBR}{m}t$. *Ответ*: $S = \frac{qBR}{m}t \approx 3{,}6$ м.

8. Задача. Два луча света падают из воздуха в жидкость. Углы преломления лучей равны $\beta_1 = 30°$ и $\beta_2 = 45°$. Найдите показатель преломления жидкости n, если известно, что падающие лучи перпендикулярны друг другу и лежат в одной плоскости, перпендикулярной поверхности жидкости.



Решение. Ход лучей изображен на рисунке. По закону преломления

$\sin\alpha_1 = n\sin\beta_1$, $\sin\alpha_2 = n\sin\beta_2$. Учитывая, что по условию $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1$, перепишем второе равенство в виде: $\cos\alpha_1 = n\sin\beta_2$. Возводя записанные равенства в квадрат и складывая их, можно получить $\sin^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_1 = n^2(\sin^2\beta_1 + \sin^2\beta_2)$. С использованием тригонометрического тождества $\sin^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_1 = 1$ это даст, что $n = \frac{1}{\sqrt{\sin^2\beta_1 + \sin^2\beta_2}}$.

Ответ: $n = \frac{1}{\sqrt{\sin^2\beta_1 + \sin^2\beta_2}} \approx 1{,}15$.

9. Задача. Согласно теории Бора энергию электрона на n-ом энергетическом уровне атома водорода можно представить в виде $E_n = -\frac{13{,}6}{n^2}$ эВ (1 эВ = $1{,}6\cdot 10^{-19}$ Дж). Покоящийся атом водорода испустил световой квант при переходе из возбужденного состояния ($n = 2$) в основное состояние ($n = 1$). Какую скорость v приобрел атом? Масса протона $m_p = 1{,}673\cdot 10^{-27}$ кг, скорость света $c = 3\cdot 10^8$ м/с.

   Решение. Используя формулу, полученную согласно теории Бора, можно заключить, что энергия кванта, испущенного атомом водорода, рассчитывается в виде $E = \Delta E_{2-1} = -13{,}6\left(\frac{1}{4} - 1\right) = 10{,}2$ эВ $\approx 16{,}32\cdot 10^{-19}$ Дж. При этом импульс фотона p связан с его энергиейE соотношением $p = \frac{E}{c}$, где c – скорость света. По закону сохранения импульса $\frac{E}{c} = m_p v$, откуда $v = \frac{E}{m_p c} = \frac{16{,}32\cdot 10^{-19}}{1{,}673\cdot 10^{-27}\cdot 3\cdot 10^8} = 3{,}25$ м/с.

   Ответ: $v = 3{,}25$ м/с.

10. Задача. Определите неизвестный продукт X ядерной реакции: ${}^{44}_{20}\mathrm{Ca} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{41}_{19}\mathrm{K} + \mathrm{X}$ и рассчитайте энергию этой реакции. Массы изотопов и частиц пусть равны: $M_{{}^{44}_{20}\mathrm{Ca}}$ = 43,95549 а.е.м., $m_{{}^{1}_{1}\mathrm{H}}$ = 1,00783 а.е.м., $M_{{}^{41}_{19}\mathrm{K}}$ = 40,96184 а.е.м., $M_{{}^{4}_{2}\mathrm{He}}$ = 4,00260 а.е.м. Ответ приведите в электрон-вольтах (1 а.е.м. ≈ $1{,}66\cdot 10^{-27}$ кг, 1 эВ =$1{,}6\cdot 10^{-19}$ Дж).
   Решение. Воспользуемся законами сохранения при ядерных реакциях – законом сохранения электрического заряда и законом сохранения массового числа: $44 + 1 = 41 + A$, и $20 + 1 = 19 + Z$. Таким образом, получаются значения $A = 4$, и $Z = 2$. Следовательно, неизвестным продуктом данной ядерной реакции является ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$. Далее, воспользу-

емся законом сохранения энергии при ядерных реакциях, согласно которому сумма массовых чисел ядер до реакции равна сумме массовых чисел ядер после реакции плюс дефект массы Δm, который «превращается» в энергию, выделяющуюся при протекании реакции: $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$. Для заданной ядерной реакции такое балансовое равенство приобретёт вид: $M_{\mathrm{Ca}} + m_{{}^1_1\mathrm{H}} = M_{\mathrm{K}} + M_{{}^4_2\mathrm{He}} + \Delta m$. Используя данные, приведенные в условии, можно, подставив все известные и найденные выше при решении значения, можно получить, что $\Delta m = M_{\mathrm{Ca}} + m_{{}^1_1\mathrm{H}} - M_{\mathrm{K}} - M_{{}^4_2\mathrm{He}} = 43{,}95549 + 1{,}007783 - 40{,}96184 - 4{,}00260$. Отсюда $\Delta m = -0{,}00112$ а.е.м. < 0. Итак, из-за отрицательности дефекта массы в данной реакции происходит поглощение энергии. Величина поглощаемой энергии $\Delta E = 0{,}00112 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 / (1{,}6 \cdot 10^{-19}) \approx 1{,}0458$ МэВ.

Ответ: Реакция с поглощением энергии, $\Delta E = 1{,}05$ МэВ.

Рекомендуемая литература по физике

Основная литература

1. *Мякишев Г.Я, Синяков А.З.* Физика: Механика. 10 кл. Углублённый уровень: учебник. – М.: Дрофа, 2019, 510 с.
2. *Мякишев Г.Я, Синяков А.З.* Физика: Молекулярная физика. Термодинамика. 10 кл. Углублённый уровень: учебник. – М.: Дрофа, 2018, 351 с.
3. *Мякишев Г.Я., Синяков А.З.* Физика: Электродинамика. 10-11 кл. Углублённый уровень: учебник. – М.: Дрофа, 2019, 476 с.
4. *Мякишев Г.Я., Синяков А.З.* Физика: Колебания и волны. Углублённый уровень. 11 кл.: учебник. – М.: Дрофа, 2019, 284 с.
5. *Мякишев Г.Я., Синяков А.З.* Физика: Оптика. Квантовая физика. Углублённый уровень. 11 кл.: учебник. – М.: Дрофа, 2019, 478 с.
6. *Буховцев Б.Б., Кривченков В.Д., Мякишев Г.Я., Сараева И.М.* Задачи по элементарной физике. – М.: Книга по требованию, 2013, 416 с.
7. *Бендриков Г.А., Буховцев Б.Б., Керженцев В.Г., Мякишев Г.Я.* Задачи по физике для поступающих в вузы. – М.: Физматлит, 2015, 344 с.

Дополнительная литература

1. *Ландсберг Г.С.* Элементарный учебник физики. В 3-х кн. – М.: Физматлит, 2017-2018, 612с., 488 с., 664 с.
2. *Яворский Б.М., Селезнев Ю.Д.* Физика. Справочное руководство. Для поступающих в вузы. – М.: Физматлит, 2019, 676 с.
3. Физика. Учебники для 10 и 11 классов школ и классов с углублённым изучением физики /под ред. А.А. Пинского. – М.: Просвещение, 2017-2018, 415 с., 416 с.
4. *Бутиков Е.И., Кондратьев А.С.* Физика. В 3-х кн. – М.: Физматлит, 2018, 352 с., 340 с., 336 с.
5. *Павленко Ю.Г.* Физика. Избранные задачи. В 2- кн. – М.: Физматлит, 2008, 544 с., 432 с.
6. *Козел С.М.* Сборник задач по физике. – М.: Кига по требованию, 2012, 128 с.
7. *Гольдфарб Н.И.* Физика. 9-11 кл. Задачник. Учебное пособие. – М.: Дрофа, 2019, 400 с.
8. Задачи по физике / под ред. О.Я. Савченко – Новосибирск овосибирский государственный университет, 1999, 370 с.
9. Задачи вступительных экзаменов и олимпиад по физике в МГУ - 1992-2002. –М.: Физический факультет МГУ, 1992 и последующие издания.

Материалы к вступительным испытаниям по русскому языку (изложение)

Методические рекомендации по написанию изложения

Изложение – это вид проверочной работы, позволяющий осуществить комплексную оценку знаний русского языка у выпускников школ и средне-специальных учебных заведений по целому ряду параметров.

Экзаменационное изложение бывает двух видов: сжатое и подробное (полное). Первое входит в число заданий ЕГЭ в Российской Федерации. Сжатое изложение представляет собой передачу исходного текста в сокращении, без мелких подробностей и второстепенной информации. Сжатым считается текст, сокращённый, по меньшей мере, на 1/3. В зависимости от объёма исходного текста число слов в итоговой работе не должно превышать некоторый допустимый предел. Скажем, содержание текста из 152 слов должно быть передано в 70-90 словах.

Подробное, или полное, изложение подразумевает передачу содержания как можно ближе к исходному тексту. В этом случае не требуется проводить какую-то дополнительную работу с содержанием – только понять главную мысль/сюжет, логику изложения и постараться все это воспроизвести письменно. В рамках вступительного экзамена по русскому языку в Казахстанском филиале МГУ практикуется как раз второй вид изложения – подробное.

Основные требования, предъявляемые к экзаменационному изложению: абитуриент должен не только грамотно, максимально полно и правильно передать содержание текста, прочитанного экзаменатором, но и сохранить при этом авторский стиль и замысел. При этом дословное воспроизведение исходного текста не требуется. Сложные предложения можно упрощать, слова, вызывающие затруднения, заменять более простыми синонимами и т.д.

Для успешного воспроизведения текста экзаменационного изложения абитуриенту необходимо:

1) знать и уметь применять правила орфографии и пунктуации;

2) владеть навыком грамотного письма на основе знания грамматики, словообразования, орфографии и пунктуации;

3) уметь определять тему, идею текста и видеть его композицию;

4) уметь определять тип речи, составлять план текста (выделять микротемы);

5) уметь определять стиль текста и особенности языка произведения;

6) суметь полно и точно воспроизвести текст, сохраняя последовательность фактов и микротем, особенности авторского понимания поставленной проблемы, особенности языка и стиля текста.

По характеру текстового материала изложения распределяются по **следующим основным видам**: 1) описательное (или с элементами описания), 2) повествовательное (сюжетное), 3) изложение-рассуждение (или с элементами рассуждения). При этом важно помнить, что в «чистом» виде изложения одного и того же типа встречаются редко, обычно в текстах наблюдается сочетание нескольких типов. В связи с этим очень важно уметь правильно определить тип речи, использованный в тексте, так как каждый из них имеет свои особенности.

Описательное изложение – наиболее сложный вид работы. Восприятие и последующее воспроизведение описаний вызывает затруднения у абитуриентов по целому ряду причин: нет динамично развивающегося сюжета, который, как правило, достаточно легко воспринять и запомнить; статичная картина; большое количество параметров описываемого предмета (явления, состояния, внешнего портрета человека и т.п.) и его признаков, которые необходимо не только запомнить, но и воспроизвести впоследствии в нужном порядке.

В текстах-описаниях важны выразительность, эмоциональность речи, способность абитуриента передать картину так, чтобы сохранить её подробности. При написании такого вида изложения важно не упустить из виду каждый предмет, каждую мелочь, составляющие общую картину.

Повествовательное, или сюжетное, изложение – наиболее простой вид работы. Текст содержит рассказ о событиях, о жизни людей (или городов, стран и т.п.), о каком-либо роде деятельности и т.д. Повествование бывает не только художественное (встречается чаще всего), но и чисто информативное.

Для изложений, воспроизводящих повествовательные тексты, важна передача последовательно сменяющих друг друга действий. Наиболее распространённые ошибки, допускаемые абитуриентами: описание событий/действий героев не в той последовательности; нечёткое выделение завязки, кульминации, развязки действий; неумение подробно передать те события/действия, о которых идёт речь в тексте; не всегда фиксируются ими выводы, которые делает или к которым подводит ходом всего повествования автор текста.

Изложение-рассуждение также нередко вызывает затруднения у абитуриентов. Как правило, это связано с недостаточным знанием структурных элементов, составляющих подобные тексты: тезис, аргументы, вывод. Здесь очень может помочь аналитичность мышления, способность ответить не только на вопрос «Что и где происходит?», но и на вопросы «По какой причине происходит?», «Что будет дальше?».

Работа над изложением данного типа предполагает несколько этапов:

1) правильно выделить в тексте все компоненты рассуждения;

2) уточнить основную мысль текста, его главный тезис;

3) выделить аргументы и понять логику из расположения;

4) выбрать подходящие языковые средства для передачи авторского рассуждения;

5) воспроизвести текст, сохранив логику изложения тезисов и аргументации.

Изложение-рассуждение помогает развитию логического мышления абитуриентов, приучает их к развертыванию аргументации, а также к точным формулировкам выдвинутых в работе тезисов, чётко определяющих цель высказывания.

Главные ошибки

Наибольшее количество ошибок, совершаемых абитуриентами, приходится на трудные вопросы орфографии и пунктуации, которым достаточно много внимания уделяется в курсе средней школы: правописание гласных и согласных в корне; правописание приставок (особенно *пре-*, *при-*); суффиксов имён существительных и прилагательных; Н, НН в разных частях речи; НЕ с разными частями речи; постановка знаков препинания перед союзами И, КАК в простых предложения; постановка знаков препинания в сложносочинённых и сложноподчинённых предложениях и т.д.

Отдельно хотелось бы отметить, что у выпускников школ с казахским языком обучения подготовка к изложению и его написание (независимо от типа текста) нередко вызывает бóльшие затруднения. Это связано не только с тем, что в школе далеко не всем приходилось сталкиваться с таким форматом работы или разным уровнем владения русским языком, но и с грамматическими различиями, существующими между казахским и русским языками.

В частности, основную трудность, которую не всегда возможно преодолеть при самостоятельной подготовке, составляет категория рода. В казахском языке мужской, женский и средний род не дифференцированы, в отличие от русского, требующего не только правильного склонения существительных, прилагательных, числительных и причастий, но и согласования по роду в словосочетаниях и предложениях (выбор правильного падежного либо глагольного окончания).

Так, при правильном склонении существительного, например, женского рода, прилагательное в изложениях у абитуриентов, испытывающих эти трудности, зачастую имеет окончание мужского рода. Возникает ситуация, аналогичная описанной в анекдоте: «Один чай и один булочка». Подобные ошибки в экзаменационной работе приводят к потере баллов.

Другие ошибки

К числу ошибок, отрицательно влияющих на итоговую оценку работы, помимо перечисленных выше, относятся следующие:

1) неправильное образование падежных форм существительных, прилагательных, количественных числительных, притяжательных местоимений, спрягаемых форм глагола (личных форм глаголов, действительных и страдательных причастий, деепричастий).

2) нарушение связи между подлежащим и сказуемым или способа выражения сказуемого. Например: *Главное, чему теперь я хочу уделить внимание, это **художественной стороне произведения**. Он написал книгу, которая **эпопея.** Все были рады, счастливы и **веселые.***

3) ошибки в построении предложений с однородными членами, причастным и деепричастным оборотами.

4) нарушение границ предложения. Например: *Его не приняли в баскетбольную команду. Потому что он был невысокого роста.*

Кроме грамматических, могут быть допущены и речевые ошибки:

1) употребление слова в несвойственном ему значении: ***Благодаря** пожару, лес сгорел*;

2) употребление слов иной стилевой окраски; смешение лексики разных эпох; неуместное употребление канцелярита, экспрессивных, эмоционально окрашенных слов, устаревшей лексики, жаргонизмов, неуместное употребление фразеологизмов: *По **задумке** автора, герой побеждает; Молчалин **работает** секретарём Фамусова; В романе А.С. Пушкина **имеют место** лирические отступления; Автор **то и дело***

прибегает к употреблению метафор и олицетворений; Зощенко ***палец в рот не клади,*** *а дай только посмешить читателя*;

3) неразличение паронимов, синонимичных слов; ошибки в употреблении антонимов при построении противопоставления; разрушение образного значения фразеологизма в неудачно организованном контексте: *Были приняты* ***эффектные*** *меры; Имя этого поэта* ***знакомо*** *во многих странах; В третьей части текста не веселый, но и* ***не мажорный мотив*** *заставляет нас задуматься; Грампластинка не сказала ещё своего* ***последнего слова***;

4) нарушение лексической сочетаемости: *играть значение, повысить кругозор, наращивать мастерство*.

Для того, чтобы свести к минимуму число неточностей и ошибок, рекомендуется сразу записывать в черновике все необычные или редко встречающиеся обороты речи и отдельные слова и выражения. После спокойного анализа первоначального черновика и его уточнённого варианта, составленного при повторном прослушивании текста, читаемого экзаменатором, можно будет принять решение оставить в собственном тексте редко используемое слово или необычный речевой оборот, если при этом не возникает опасений в его правильной орфографии или расстановке знаков препинания, либо, если сомнения все-таки остаются, заменить их более простым аналогом, правописание которого не вызывает сомнений.

Самостоятельная подготовка

Самостоятельная подготовка абитуриента к вступительному экзамену по русскому языку должна вестись по нескольким направлениям. В первую очередь, конечно же, необходимо повторить (или выучить) правила русской орфографии, пунктуации, грамматики в целом. Для этого можно использовать разнообразные справочники и пособия по русской грамматике, например, под редакцией Д. Э. Розенталя, или комплекс учебников для 5-9 классов под редакцией В. В. Бабайцевой (теория и практика).

Другим важным условием успешного изложения является скорость письма, ведь независимо от того, какой тип текста будет предложен, чем больше удастся зафиксировать при первом и втором прочтениях текста экзаменатором, тем больше шансов написать максимально полное изложение.

Для повышения скорости письма существует довольно много разнообразных способов, самым простым из которых является регулярное написание текстов под диктовку с постепенным ускорением темпа чтения. Для реализации этого способа требуется помощник, в роли которого может выступать один из родственников или друзей абитуриента. Если помощника найти не удалось, можно воспользоваться видеоматериалами диктантов, представленных в сети Интернет. В крайнем случае, можно тренироваться записывать за научно-популярными передачами либо за новостными выпусками на радио или телевидении. При этом важным моментом является последующая проверка правильности/грамотности написанного, которую можно производить как самостоятельно, так и с чьей-нибудь помощью.

Еще один способ увеличить скорость письма – переписывание текста за установленное время. При этом объём текста должен постепенно увеличиваться, а отведенное для этого время – сокращаться, до некоторого установленного предела. Тексты для данного упражнения лучше всего подбирать из русской классики либо из детской литературы, можно использовать и тексты научно-популярного стиля. Помимо развития скорости письма данный способ полезен для развития грамотности, т.к. в процессе переписывания текста задействуется визуальная, то есть зрительная, память, которая обязательно зафиксирует не только правильное написание некоторых слов, но и постановку знаков препинания.

Собственно, тренировка памяти также относится к важным элементам подготовки к изложению. Одно из главных, если не самое главное, требование к абитуриенту – хорошая память, которая важна не только на экзамене по русскому языку, но и на всех прочих. Для развития памяти, как и для ускорения письма, существует большое количество разнообразных методик. Самая простая – заучивание наизусть с последующим воспроизведением вслух, про себя или на бумаге. Причём учить необходимо не только стихотворения, но и прозу, а также интересные и полезные факты об окружающем мире.

Еще одна мнемотехника связана с воспроизведением слов наоборот (например, потолок – колотоп, телефон – нофелет). Это позволит улучшить не только память, но и орфографию, так как при этом будут произноситься и запоминаться даже непроизносимые в некоторых русскоязычных словах согласные буквы.

Все эти рекомендации, реализованные в комплексе, дадут положительный результат при подготовке.

Что и как делать на экзамене

Вступительный экзамен по русскому языку, как уже было сказано выше, проводится в форме изложения. Длительность экзамена – 4 часа. После того, как все подготовительные формальности завершаются, экзаменатор приступает к первому чтению текста экзаменационного изложения. Как правило, этот текст берётся из русской детской литературы (например, произведения А. П. Гайдара, В. П. Катаева) либо адаптируется текст классической литературы (например, А. П. Чехова), а также научно-популярный или публицистический текст. Объём – 450-480 слов.

Делать пометки в черновике по ходу первого чтения рекомендуется делать сразу, независимо от того, насколько хорошая память у абитуриента. Экзамен – всегда стресс, поэтому чем раньше абитуриент начинает записывать, тем быстрее он настраивается на работу и больше запоминает.

После завершения первого чтения текста абитуриентам даётся 20-30 минут на работу с черновиком. Каким образом распорядиться этим временем, каждый решает самостоятельно, но лучше всего потратить его на фиксацию того, что успели запомнить, но не успели записать, определения типа текста (описание, повествование, рассуждение), а также на разбор черновика, мысленный пересказ и, возможно, на составление небольшого плана текста.

При втором чтении рекомендуется восполнять пробелы в черновике, уточнять и корректировать детализацию (особенно для описательных текстов).

После второго чтения и до конца экзамена абитуриент работает над изложением самостоятельно. Сначала работа ведётся в черновике, затем, когда абитуриент понимает, что воспроизвёл текст максимально полно и грамотно, можно переписывать в чистовик. Лучше всего выделить на это порядка 30-40 минут.

При переносе текста в чистовик важно помнить, что все допущенные в этом варианте ошибки приведут к потере баллов. Также важно помнить и понимать, что если в чистовике делаются какие-то исправления, то они должны быть сделаны максимально аккуратно, а исправление верного на неверное приведёт к потере баллов.

Если абитуриент понимает, что в оставшееся время не успеет переписать какую-то часть текста из черновика в чистовик, ему необходимо в тексте чистовика сделать пометку «Далее см. черновик» и с этого момента соответствующий фрагмент черновика будет рассматриваться экзаменаторами как чистовой вариант с учётом всех допущенных в нём ошибок.

Как оценивают изложение

Изложение, как и вступительные испытания (экзамены) по другим предметам, оценивается по 100 балльной шкале. При проверке и оценке изложения учитываются следующие параметры:

- орфография,
- пунктуация,
- стилистика,
- полнота изложения.

Образцы вступительных испытаний по русскому языку (изложений)

Вариант И.2018-1

«Меня украли!»

Пете категорически было запрещено одному надолго уходить из дома. Но так как ему очень хотелось рассказать о вчерашнем происшествии Гаврику, он утром незаметно вышел на улицу, погулял для виду возле дома, завернул за угол и побежал к морю.

Недалеко от своего дома он неожиданно встретился с Гавриком, и тот предложил Пете пойти на Ближние Мельницы – в железнодорожную слободку, находившуюся недалеко от города. Для Пети пойти без спросу на Ближние Мельницы являлось поступком ужасным. Он долго колебался, но все-таки согласился. Весь день он провел с Гавриком. Это был чудесный день для Пети!

Наступил вечер. Пора было возвращаться домой. И тут Петя вспомнил о том, что он нарушил запрет, и ужаснулся: что будет дома! Счастье кончилось. Наступала расплата. Петя шел домой и думал, что никакая сила в мире не сможет спасти его от неслыханного скандала. Но судьба послала Пете неожиданное избавление.

Можно было ожидать всего, что угодно, но только не этого.

Недалеко от Сенной площади по улице, спотыкаясь, бежал четырёхлетний Павлик. Он был совершенно один и громко плакал.

Петя позвал Павлика. Павлик, увидев Петю, бросился к нему и обеими ручками вцепился в курточку брата. На вопрос Пети, что он тут делает, Павлик сначала не мог выговорить ни слова. Наконец он прорыдал: «Меня украли!»

Что же случилось?

Оказывается, не одному Пете пришла в голову счастливая мысль самостоятельно погулять. Павлик тоже давно мечтал об этом. Он, конечно, не хотел уходить далеко от дома.

Но, на беду, как раз в это время во двор пришли артисты с куклами и стали давать представление. Вместе с другими детьми Павлик посмотрел его до конца, но оно показалось ему слишком коротким. Кто-то сказал, что в другом дворе будут показывать больше. И все пошли за артистами в другой двор. А там представление оказалось еще короче. Дети не сомневались, что в следующем дворе они увидят представление полностью.

Так они переходили из одного двора в другой вслед за женщиной, тащившей на спине шарманку, и мужчиной без шапки, с ширмой под мышкой. Павлик топал на своих крепеньких ножках в толпе других детей. Он забыл все на свете: и тетю, и папу, и даже игрушечную лошадку. Мальчик потерял всякое представление о времени и пришёл в себя, лишь заметив с удивлением, что уже вечер и что он идет за шарманкой по совершенно незнакомой улице. Все дети давно отстали и разошлись. Он был совсем один. Женщина и мужчина с шарманкой шли быстро, очевидно торопясь домой. Павлик едва поспевал за ними. Город становился все более незнакомым, подозрительным. Павлику показалось, что мужчина и женщина о чём-то зловеще шепчутся. Поворачивая за угол, они вдруг оба обернулись. Ребенка охватил ужас. Ему в голову внезапно пришла мысль, заставившая его задрожать: сейчас его схватят и унесут куда-нибудь далеко. С громким рёвом Павлик бросился наутёк и бежал до тех пор, пока неожиданно не наткнулся на Петю.

Когда братья вернулись домой, там уже царила полнейшая паника. Увидев Павлика целым и невредимым, все очень обрадовались. И хотя Петиному рассказу о том, как он весь день бегал по городу и искал Павлика, никто не поверил, всё-таки Петя вышел сухим из воды, избавившись от неслыханного скандала.

(По В.П. Катаеву)

Для написания на доске: Гаврик, Ближние Мельницы.
Для пояснения и (при необходимости) написания на доске:

слободка – уменьш. от слобода (поселок около города, пригород)
шарманка – переносной музыкальный инструмент в виде надеваемого на плечо ящика;
ширма – складная перегородка из рам, обтянутых материей, использовалась в кукольном представлении.

Вариант И.2018-2

Лиса в неволе

Приехав к Кусаину, я увидел большую красивую лису, привязанную к колу. Она, развалившись, кормила пятерых лисят. Лисята не были на привязи. Они еще плохо бегали, охотиться не могли, поэтому никуда не убегали от матери.

Пока я жил у Кусаина, всё свободное время отдавал лисе и её детям. Кусаин вырыл неподалеку от кола нору и застелил её шерстью. Лису кормили сырым мясом и потрохами. Лисят подкармливали молоком.

Лиса временами забывала о неволе. Она радовалась вместе с резвящимися лисятами, тщательно вылизывала их, играла с ними и покорно растягивалась у норы, когда приходило время кормить своих крошек.

Лиса – трудно приручаемый зверь. Шумы и голоса людей пугали её, дым и огонь костра страшили её. Соседство собаки – опасное соседство. Но у неё дети, она мать. Чувство материнства заставило лису примириться со всем. Оно сильнее страха. Оно заставило её забыть о цепи и ошейнике – о неволе.

Иногда лису выводили на прогулку на цепи. Это делал сын Кусаина. Он бегал с лисой по степи. Лисята бежали следом. Лиса, туго натягивая цепь, стремилась в глубь степи – подальше от жилья, от чужих запахов, в родные просторы. И каждая такая прогулка ей, наверное, казалась началом освобождения. Но цепь возвращала её. Мы поворачивали назад. И лиса теперь не стремилась бежать первой. Она плелась за нами, понурив голову. Плелась к ненавистному колу, в ненастоящую, выкопанную человеком нору. А лисята ничего не понимали. Они бежали, перегоняя один другого и безобидно кусая друг друга..

Завершив свои дела, я вернулся к себе. После этого я не был у Кусаина несколько месяцев. А поздней осенью снова приехал к нему.

Сразу же я побежал к лисьему колу. Там я увидел неподвижно сидящую лису. Ее исхудавшая острая морда стала вытянутой и тонкой. Лиса напряжённо смотрела в степь, нервно вздрагивая. Она не обратила на меня никакого внимания.

У норы лежали куски мяса. Она не прикоснулась к ним.

– Они прошлой ночью бросили её ... – грустно сказал Кусаин. – Зачем им теперь мать?

Она выкормила своих детей. Она им дала всё. Острые белые зубы. Теплую рыжую шубу. Быстрые ноги. Крепкие кости. Горячую кровь. Зачем им теперь старая лиса?

Мне безумно было жаль лису. Лису, так заботливо и так нежно воспитавшую в страхе и неволе, рядом с шумным и дымным жильем человека, пятерых лисят. Они покинули её темной осенней ночью, когда все спали и ни выстрелы, ни собаки их не могли догнать. Это была хитрость. Хитрость, которую, как и свою жизнь, они тоже получили от матери.

Для зверей всё это вполне законно. Но человек и зверя хочет видеть лучшим, чем он есть на самом деле. Так уж устроены благородные человеческие глаза.

– Она звала их, – сообщил мне Кусаин. – Она вчера лаяла на всю степь.

А потом Кусаин посмотрел на меня и умолк. Постояв минутку потупившись, он направился к лисе.

Он снял с лисы ошейник и крикнул на неё. Лиса не убегала. Тогда он пронзительно свистнул. Лиса сжалась и кинулась в нору.

– Уже не верит в свободу, – сказал он. – Не верит, что мы с тобой немножечко смешные люди.

Утром нора оказалась пустой.

(По Е. Пермяку)

Для написания на доске: Кусаин

Для пояснения и (при необходимости) написания на доске:

кол — толстая, заостренная палка;

ошейник — кольцо с застежкой, надеваемое на шею животного;

потроха — внутренности животного (обычно птицы или рыбы), идущие в пищу.

Рекомендуемая литература по русскому языку

1. *Бабайцева В.В.*, *Чеснокова Л.Д.* Русский язык: Теория. 5–9 классы. Учебник. ФГОС. – М.: Дрофа, 2019, 320 с.
2. *Бабайцева В.В., Беднарская Л.Д.* Русский язык. 8–9 классы. Сборник заданий к учебнику В.В. Бабайцевой –М.: Дрофа, 2017, 272 с.
3. *Баранов М.Т.*, *Костяева Т.А.*, *Прудникова А.В*. Русский язык. Справочные материалы. Пособие для учащихся / под ред. Н.М. Шанского. – М.: Просвещение, 2016, 285 с.
4. *Куманяева А.Е., Потапова Г.Н.* Диктанты и изложения по русскому языку: 10–11 классы. – М.: Экзамен, 2012, 191 с.
5. *Розенталь Д.Э.* Русский язык. Сборник упражнений и диктантов. Для школьников старших классов и поступающих в вузы – М.: Мир и образование, 2017, 448 с.
6. *Розенталь Д.Э.* Пособие по русскому языку с упражнениями для поступающих в вузы. – М.: АСТ, 2013, 416 с.
7. *Русова Н.Ю.* Как писать сочинение, изложение и диктант: учебное пособие для средней школы, абитуриентов, родителей. – Нижний Новгород: Деком, 1994, 192 с.
8. *Сморщок М.Ф.* Изложения: для абитуриентов. – Минск: Вышэйшая школа, 2000, 171 с.

Желаем успешной сдачи вступительных испытаний!

Будем рады видеть вас среди студентов МГУ!